

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO

HÉBER HWANG ARCOLEZI

**UM ESTUDO COMPLEMENTAR AO PROJETO DE CONTROLE PID
NO CASO DO PÊNDULO INVERTIDO**

HÉBER HWANG ARCOLEZI

**UM ESTUDO COMPLEMENTAR AO PROJETO DE CONTROLE PID
NO CASO DO PÊNDULO INVERTIDO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Curso de Engenharia Elétrica - UNEMAT, Campus Universitário de Sinop - MT, como pré-requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador(a): Prof. Mestre Rogério Bastos Quirino



**GOVERNO DO ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**



(HÉBER HWANG ARCOLEZI)

**(UM ESTUDO COMPLEMENTAR AO PROJETO DE CONTROLE PID NO CASO DO PÊNDULO
INVERTIDO)**

Prof(a). Me. Maria Helena Vieira Kelles
Professor(a) Avaliador(a)

Prof(a). Me. Rogério Lúcio Lima
Professor(a) Avaliador(a)

Prof. Me. Rogério Bastos Quirino
Professor(a) Orientador(a)

Prof(a). Rogério Bastos Quirino
Presidente da Banca

Aprovado em 20/07/2017

Ficha Catalográfica

ARCOLEZI, Héber Hwang Arcolezi

UM ESTUDO COMPLEMENTAR AO PROJETO DE CONTROLE
PID NO CASO DO PÊNULO INVERTIDO / Héber Hwang Arcolezi.
Sinop, MT, 2017.

Orientador: Prof. Mestre Rogério Bastos Quirino
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca
Examinadora do Curso de Engenharia Elétrica - UNEMAT, Campus
Universitário de Sinop - MT, como pré-requisito para a obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus pela oportunidade da vida, como também, pela jornada trilhada em segurança, contentamento e regozijo.

À toda minha família em especial meus pais, irmão e irmã que foram fontes de incentivo e inspiração durante toda minha vida, e principalmente durante o período da graduação.

À todos os professores da UNEMAT que direta ou indiretamente tornaram possível o desenvolvimento desse trabalho. Assim como, aos técnicos e demais profissionais que sempre ajudaram nas questões burocráticas exigidas.

Ao projeto FOCCO (Formação de Células Cooperativas) em geral, e à todos integrantes que algum dia fizeram parte e o tornaram melhor a cada dia.

À todos meus colegas de classe em especial aos que diretamente colaboraram para o desenvolvimento desse trabalho, Bruno Bassi, Eduardo Thiesen Erivaldo Evaristo, Hudson Thiago Formigoni e Thiago Garcia de Andrade, pelo auxílio com questões teóricas e técnicas, bem como, pelas observações e incentivos transmitidos.

E por fim, mas não menos importante, à Universidade do Estado de Mato Grosso por disponibilizar a estrutura necessária para a conclusão desse trabalho.

“Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana.”
Carl Gustav Jung.

RESUMO

A teoria de controle empregada para resolução do problema do pêndulo invertido é bastante difundida nos campos da engenharia e controle de processos. As características intrínsecas e as inúmeras aplicações desse sistema o permitiram se tornar uma referência clássica no estudo e aplicações de técnicas de controle. Diversas pesquisas foram desenvolvidas e apresentadas desde o século anterior com intuito de solucionar alguns problemas relacionados à sistemas do dia a dia.

Neste trabalho foram apresentados os conceitos gerais da teoria de controle empregada, um breve histórico das técnicas e práticas de controle, algumas pequenas resenhas bibliográficas de trabalhos realizados à respeito de técnicas de controle para o caso pêndulo invertido sobre carro (a maioria) e o desenvolvimento de duas técnicas de controle clássicas (Servo e Regulador) com uso do controle PID para o sistema em questão.

Este trabalho vislumbra modelar e apresentar os resultados de controle ao inserir as ações PID (Proporcional, Integral e Derivativo) nos sistemas regulador e servo quando utilizados para controlar a planta do pêndulo invertido sobre carro, com intuito de complementar os trabalhos de dois autores renomados. Para o caso do sistema regulador, proposto por Oppenheim (1987), foram utilizadas técnicas do domínio da frequência para modelagem e análise de estabilidade. E para o servossistema, proposto por Ogata (2010) foram utilizadas técnicas de controle e modelagem do domínio do tempo.

Os resultados e conclusão desse trabalho, são que a complementação dos estudos realizados ao projeto de controle PID no caso do pêndulo invertido foi bastante relevante. Isto é, nos resultados foram apresentados as deduções, desenvolvimento e simulação dos sistemas de controle servo para as ações P, D, PD, PI e PID para complementar a bibliografia existente que aborda apenas o controle servo Integral por realimentação de estados. E para o sistema regulador foram apresentados o desenvolvimento, deduções e simulações dos controladores com as ações PID aplicadas individualmente e em conjunto para complementar o trabalho do autor que aborda apenas os casos com ganhos Proporcional e Derivativo.

Palavras-chave: Controle PID, Pêndulo invertido, Sistema regulador, Sistema servo, Teoria de controle

ABSTRACT

The control theory employed to solve the inverted pendulum problem is quite widespread in the fields of engineering and process control. The intrinsic characteristics and the numerous applications of this system allowed it to become a classic reference in the study and applications of control techniques. Several researches have been developed and presented since the previous century in order to solve some problems related to day to day systems.

In this final work it was presented the general concepts of the control theory employed, a brief history of control techniques and practices, some small bibliographical reviews of work carried out regarding control techniques for inverted car pendulum (most) and development Of two classic control techniques (Servo and Regulator) using the PID control for the system in question.

This work aims to model and present control results by inserting PID (Proportional, Integral and Derivative) actions in the regulator and servo system's when used to control the inverted pendulum car plant, in order to complement the work of two renowned authors. For the regulator system proposed by Oppenheim (1987), frequency domain techniques were used for modeling and stability analysis. And for the servo system, proposed by Ogata (2010) were used techniques of control and modeling of time domain.

The results and conclusion of this work are that the complementation of the studies carried out to the PID control project in the case of the inverted pendulum was really relevant. That is, in the results were presented the deductions, development and simulation of the servo control systems for the actions P, D, PD, PI and PID to complement the existing bibliography that addresses only the integral servo control by state feedback. And for the regulatory system were presented the development, deductions and simulations of the controllers with the PID actions applied individually and together to complement the work of the author that addresses only the cases with Proportional and Derivative gains.

Keywords: Control theory, Inverted pendulum, PID control, Regulator system, Servo system.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Efeitos das ações de controle PID na resposta temporal do sistema37

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Sistema de controle em malha aberta.....	29
Figura 2 - Sistema de controle em malha fechada	30
Figura 3 - Parâmetros a serem considerados na resposta transitória	32
Figura 4 - Diagrama de blocos do controle PID.....	34
Figura 5 - Diagrama de Blocos Genérico	44
Figura 6 - Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha aberta	45
Figura 7 - Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada.....	45
Figura 8 – Representação por diagrama de blocos de um sistema modelado por espaço de estados	50
Figura 9 - Estabilidade em relação à localização dos polos.....	51
Figura 10 - Sistema do pêndulo invertido sobre carro.....	59
Figura 11 - Sistema do pêndulo invertido sobre carro.....	79
Figura 12 - Diagrama de corpo livre do sistema do pêndulo invertido sobre carro....	80
Figura 13 - Servossistema do tipo 1	85
Figura 14 – Diagrama de blocos do sistema servo com Ganho P.....	86
Figura 15 – Esquema no Simulink do Sistema Servo com Ganho P.....	91
Figura 16 - Resposta ao Degrau Unitário do Sistema Servo com Ganho P.....	92
Figura 17 – Diagrama de blocos do sistema servo com Ganho D	93
Figura 18 - Resposta ao Degrau Unitário do Sistema Servo com Ganho D.....	98
Figura 19 - Diagrama de blocos do sistema servo com Ganhos PI.....	99
Figura 20 - Esquema no Simulink do Sistema Servo com Ganhos PI.....	103
Figura 21 - Diagrama de blocos do sistema servo com Ganhos PD	104
Figura 22 - Esquema no Simulink do Sistema Servo com Ganhos PD	109
Figura 23 - Diagrama de blocos do sistema servo com os Ganhos PID	110
Figura 24 - Esquema no Simulink do Sistema Servo com Ganhos PID	114
Figura 25 - Sistema do pêndulo invertido sobre carro.....	116
Figura 26 - Diagrama de blocos do sistema regulador em malha aberta	117
Figura 27 - Polos do Sistema do Pêndulo Invertido em Malha Aberta	118
Figura 28 - Resposta ao Impulso do Sistema Regulador em Malha Aberta.....	119
Figura 29 - Esquema de Representação do Sistema de Controle Regulador PID ..	120
Figura 30 – Reconfiguração da representação do sistema regulador	120
Figura 31 -Resposta ao Impulso do Sistema Regulador PD	128
Figura 32 - Resposta ao Impulso do Sistema Regulador PD	128
Figura 33 - Resposta ao Impulso do Sistema Regulador PID	131
Figura 34 - Resposta ao Impulso do Sistema Regulador PID	131

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FTMA – Função de Transferência de Malha Aberta
FTMF – Função de Transferência de Malha Fechada
SPEC – Semiplano Esquerdo Complexo
SPDC – Semiplano Direito Complexo
LIT – Linear Invariant Time
SISO – Single Input and Single Output
SIMO - Single Input and Multiple Outputs
MIMO – Multiple Inputs and Multiple Outputs
MISO – Multiple Inputs and Single output
a.C – Antes de Cristo
d. C – Depois de Cristo
P – Proporcional
I – Integral
D – Derivativo
PI – Proporcional e Integral
PD – Proporcional e Derivativo
PID – Proporcional, Integral e Derivativo
RBF – Rede Neural de Base Radial
LMI – Linear Matrix Inequalities
CAD – Computer-Aided Design
CAE – Computer-Aided Engineering
LQR – Linear Quadratic Regulator
MFA – Model Free Adaptive
RNA – Rede Neural Artificial
CR – Reforço Constante
FLC – Fuzzy Logic Controller
SFB – State Feedback Controller
FSF – Full State Feedback
SMC – Sliding Mode Control

LISTA DE SÍMBOLOS

- g – Aceleração da gravidade
L – comprimento da haste
l – comprimento da haste
u – sinal de controle
Kp – Ganho Proporcional
Ki – Ganho Integral
Kd – Ganho Derivativo
 \dot{x} – equação de estado
x – vetor de estado planta
y – sinal de saída
r – sinal de referência (entrada)
 ξ – sinal de erro
 ξ – variável de estado (sinal de erro integrado)
K – matriz de ganho K de realimentação de estados
A, B, C = matriz constante
P – posto da matriz
D – determinante da matriz
H – Linha horizontal
V – Linha vertical
 θ – ângulo
 x_1 = posição angular do pêndulo;
 x_2 = velocidade angular do pêndulo;
 x_3 = posição do carro;
 x_4 = velocidade do carro;
 x_5 = variável de estado ξ .
 $\dot{\theta} = \dot{x}_1$ – velocidade angular
 $\ddot{\theta} = \dot{x}_2$ – aceleração angular
 $\dot{x}_3 = x_4$ – velocidade do carro
 \dot{x}_4 – aceleração do carro

SUMÁRIO

RESUMO.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
LISTA DE TABELAS	IX
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	X
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	XI
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XII
SUMÁRIO	XIII
1 INTRODUÇÃO.....	15
1.1 PROBLEMATIZAÇÃO E JUSTIFICATIVA	17
1.2 OBJETIVOS	19
1.2.1 Objetivo Geral	19
1.2.2 Objetivos Específicos	19
1.3 METODOLOGIA	20
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	22
2 REVISÃO DA LITERATURA	23
2.1 HISTÓRICO DA TEORIA E PRÁTICAS DE CONTROLE	23
2.2 TEORIA DE CONTROLE	27
2.2.1 Resposta temporal dos sistemas de controle	31
2.2.2 Ações de controle PID (Proporcional-Integral-Derivativo).....	33
2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA PARA SISTEMAS DE CONTROLE	38
2.3.1 Modelagem no Domínio da Frequência	40
2.3.2 Modelagem no Domínio do Tempo	46
2.4 TÉCNICAS DE CONTROLE E ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DE CONTROLE	51
2.4.1 Estabilidade de sistemas de controle: Efeitos da localização dos polos	51
2.4.2 Método de Alocação de Polos.....	52
2.4.3 Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz	54
2.5 PÊNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO	59
2.5.1 Resenha Bibliográfica: Técnicas de controle aplicadas ao sistema do pêndulo invertido	60
3 SISTEMA DE CONTROLE SERVO.....	78
3.1 MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA DO PÊNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO	79
3.2 TÉCNICAS DE CONTROLE MODELAGEM DO DOMÍNIO DO TEMPO ...	82
3.2.1 Caso 1: Ação Proporcional (P)	86

3.2.2	Caso 2: Ação Derivativa (D).....	92
3.2.3	Caso 3: Ações Proporcional e Integral (PI)	98
3.2.4	Caso 4: Ações Proporcional e Derivativa (PD)	104
3.2.5	Caso 5: Ações Proporcional, Integral e Derivativa (PID).....	109
4	SISTEMA DE CONTROLE REGULADOR	115
4.1	MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA DO PÊNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO	115
4.2	TÉCNICAS DE CONTROLE E MODELAGEM DO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	117
4.2.1	Caso 1: Ação Proporcional (P)	121
4.2.2	Caso 2: Ação Integral (I).....	122
4.2.3	Caso 3: Ação Derivativa (D).....	123
4.2.4	Caso 4: Ações Proporcional e Integral (PI)	124
4.2.5	Caso 5: Ações Proporcional e Derivativa (PD)	125
4.2.6	Caso 6: Ações Proporcional, Integral e Derivativo (PID)	129
5	CONCLUSÃO	133
6	REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO	134

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, devido ao desenvolvimento tecnológico de muitas áreas da ciência, engenharias e principalmente das indústrias, o mercado de trabalho tem exigido dos engenheiros um alto grau de conhecimento das teorias de controle. Pois, as indústrias e inúmeros processos tecnológicos do dia a dia requerem a viabilidade e otimização dos processos. Dessa forma, o engenheiro ou cientista que pretende aprofundar-se no campo da automação e controle de sistemas deve estar apto para projetar sistemas que realizem tarefas com alto grau de precisão e repetitividade (ÅSTRÖM, 2008; D'AZZO e HOUPIS, 2003; OGATA, 2010; SILVA, 2013).

A teoria de controle é um ramo da matemática e engenharia direcionada à aplicações que lidam com o princípio básico de análise e controle de sistemas. Essa teoria estuda o comportamento de sistemas, tanto naturais como artificiais, e a manipulação de certos parâmetros para forçar o sistema a ter um comportamento desejado. Os sistemas de controle são aplicados em diversas situações do dia a dia, seja na natureza, nas indústrias ou aplicações específicas. Esse ato de controlar um sistema significa influenciar o seu comportamento para alcançar um objetivo esperado (SONTAG, 1998; LEIGH, 2004).

O termo “*controle*” na engenharia é de natureza interdisciplinar, pois, aborda diversas disciplinas da ciência da computação, física, das engenharias elétrica, eletrônica, mecânica, química e qualquer combinação entre elas. O controle de sistemas é uma parte fundamental da sociedade hoje em dia. Por exemplo, diversos sistemas de controle fazem parte da nossa vida cotidiana como os eletrodomésticos em geral, refrigeradores e aquecedores de ar, como também, os sistemas de informações. Alguns, por vezes, passam despercebidos como no caso da própria natureza que é repleta de sistemas de controle que se desenvolveram bem antes da humanidade. Um exemplo bem comum é o corpo humano que desempenha uma série de funções, conscientes ou não, para controlar a respiração, pressão arterial, nível de açúcar no sangue, pegar um objeto, medir distâncias, entre mais. Outro exemplo é o ato de conduzir um carro, onde o controle é aplicado através do motorista, ou seja, este é responsável por apresentar as entradas do sistema que são a velocidade e direção com intuito de gerar uma direção segura (TEWARI, 2002; MANDAL, 2006; JAGAN, 2008; NISE, 2011).

Ogata (2010) ressalta sobre o controle automático da seguintes maneira:

O controle automático é essencial em qualquer campo da engenharia e da ciência. O controle automático é um componente importante e intrínseco em sistemas de veículos espaciais, sistemas robóticos, modernos sistemas de manufatura e quaisquer operações industriais que envolvam o controle de temperatura, pressão, umidade, viscosidade, vazão, etc. É desejável que a maioria dos engenheiros e cientistas esteja familiarizada com a teoria e a prática do controle automático (OGATA, 2010, p. 1).

No caso específico desse trabalho o sistema a ser averiguado e controlado é o caso do pêndulo invertido sobre carro. O valor teórico facultado a esse sistema vem do fato deste possuir características de não linearidade, alto nível de complexidade e de comportamento instável em malha aberta. Esse sistema pode ser descrito por equações diferenciais, tornando possível linearizá-lo em torno de um ponto de equilíbrio e então aplicar técnicas de controle linear para estabilizá-lo. Os inúmeros modos de modelagem e simulações de técnicas de controle que esse sistema permite, o torna um importante objeto de estudo na área de engenharia. Além dessas características intrínsecas, o fato desse sistema ter inúmeras aplicações em sistemas do dia a dia como o veículo de transporte humano (*Segway*), veículos espaciais, lançamento de foguetes, robôs autônomos, diversos sistemas robóticos, guindastes especiais, indústria bélica, edifícios altos submetidos às ações do vento ou terremotos, o tornam ainda mais interessante (LUNDBERG, 2009; BOUBAKER, 2012; KAFETZIS e MOYSIS, 2017).

Uma aproximação prática do sistema do pêndulo invertido sobre carro é a simples brincadeira de tentar equilibrar uma vassoura, pelo cabo, sobre a palma da mão. Nessa situação a vassoura representa o pêndulo invertido e a mão que é a base do sistema representa o carro. Cabe ressaltar que a vassoura é instável e pode cair para qualquer lado caso não seja aplicada uma força de controle. Portanto, visto que para esse sistema o intuito de controle é manter a vassoura na posição vertical, é necessário movimentar a mão de um lado para o outro a fim de criar uma força de controle que se oponha ao movimento instável da vassoura (RIBEIRO, 2007; DORF e BISHOP, 2011; LENKA, 2011).

Para projetar um sistema de controle que mantenha a haste do pêndulo em equilíbrio e conduza o carro para uma posição desejada, o convencional controle PID (Proporcional, Integral e Derivativo) ainda é bastante utilizado (JOSE, 2015). Os sistemas de controle que aplicam as ações de controle PID para estabilizar o

sistema do pêndulo invertido consistem basicamente em projetar um servossistema, um sistema regulador ou um sistema em cascata. De forma que, o erro é medido e comparado com a referência adotada e as ações de controle inseridas na malha do sistema corrijam o erro medido e estabilizam o sistema (MURALIKRISHNA *et al*, 2005; KURDEKAR e BORKAR, 2013; OPPENHEIM, 1987).

Este trabalho vislumbra complementar os trabalhos de dois autores renomados na área de engenharia e controle de sistemas. O sistema de controle regulador desenvolvido por Oppenheim (1987), modelado por funções de transferência e analisado pelo método do Lugar das Raízes, foi apresentado pelo autor apenas para os ganhos Proporcional e Derivativo aplicados individualmente e em conjunto. E o sistema de controle servo desenvolvido por Ogata (2010), modelado por espaço de estados e projetado pelo Método de Alocação de Polos, foi apresentado pelo autor, assim como em diversas bibliografias, apenas para o ganho Integral. Portanto, para esse trabalho a análise do sistema regulador será realizada pelo Critério de Routh-Hurwitz, devido à sua praticidade e confiabilidade, para todos os ganhos PID aplicados individualmente e em conjunto. E o sistema servo seguirá o desenvolvimento do autor, ou seja, será modelado e projetado por técnicas do domínio do tempo para todos os ganhos PID aplicados individualmente e em conjunto.

1.1 PROBLEMATIZAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Para o problema do pêndulo invertido, inúmeras pesquisas já foram realizadas e apresentadas em forma de artigos, teses, trabalhos de conclusão de curso, dentre outros, utilizando o controle PID (ARCOLEZI *et al*, 2017; ARCOLEZI e QUIRINO, 2017). Porém, em diversos casos os objetivos desses trabalhos são de apresentar os parâmetros que melhor satisfizeram os resultados de controle, ou mesmo de comparar uma técnica com outra através das respostas obtidas. Dessa forma, muita das vezes fica vago o caminho tomado até alcançar o controle e a estabilidade do sistema, como também, na maioria das vezes são apresentados somente os métodos de controle que conseguem estabilizar o sistema.

Portanto, mesmo sendo uma técnica já bastante explorada na literatura e pesquisas, esse trabalho tem como objetivo discutir aspectos da técnica PID por vezes não explorados, por exemplo, como em: 1) (OGATA, 2010), que desenvolve o

projeto dos controles servo e regulador com ganho somente integral no caminho servo, baseado na representação espaço de estados, mas sem explorar as dificuldades decorrentes do projeto do controle servo P, D, PI, PD e PID baseado nesse tipo de representação. E 2) (OPPENHEIM,1987), que discute o projeto do controle regulador com as ações de controle P, D e PD na malha de realimentação, mas sem explorar, o efeito da inserção da ação de controle integral por si só e em conjunto com as outras duas ações.

Portanto, nesse trabalho é proposto o estudo e projeto de controle PID complementar especificamente para os casos de 1) (OGATA, 2010) e 2) (OPPENHEIM, 1987). Acentua-se aqui, que esse trabalho não é um trabalho crítico e sim um estudo complementar aos casos em que os autores não abordaram a inserção das ações de controle PID nos sistemas. Isto é, talvez por motivos “óbvios” ou mesmo para deixar como desafio e estímulo para os estudantes, os autores apresentaram o desenvolvimento para apenas uma ou algumas das ações de controle.

Portanto, de forma resumida pretende-se desenvolver dois sistema de controle clássicos (servo e regulador), para melhor compreensão dos efeitos ao inserir as ações de controle PID na malha direta do sistema servo e na malha de realimentação do sistema regulador. Visto que, segundo Arcolezi e Quirino (2017) pode ser comum alguns estudantes dos cursos de engenharia terem a percepção errônea de que o emprego das ações de controle PID só ocorrem no controle servo. Muitas das vezes por desconhecer os conceitos ou a utilidade e efeito do controle PID na malha de realimentação do sistema regulador.

Para todos os casos desenvolvidos, esse trabalho visa apresentar quais ações de controle estabiliza, ou não, sem se preocupar com os melhores parâmetros para as ações de controle PID. Pois, no sistema servo que será modelado por espaço de estados o método de alocação de polos já garante a estabilidade do sistema (se o sistema for de estado completamente controlável) com uma adequada localização dos polos, cabendo ao projetista respeitar as faixas dos valores de ganhos e escolher o que melhor satisfaça o projeto. E para o sistema regulador, será utilizado o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz pela praticidade e confiabilidade do método em dizer se o sistema é ou não estável, baseado na equação característica do sistema. Caso o sistema for estável, serão definidas as faixas de

valores dos ganhos para estabilizar assintoticamente o sistema, como também, serão simulados para alguns valores respeitando as faixas estabelecidos.

1.2 OBJETIVOS

Os principais objetivos desse trabalho são apresentados a seguir:

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desse trabalho é projetar, simular e apresentar dois modelos clássicos de controle (Servo e Regulador), com as ações de controle PID inseridas na malha direta no sistema servo e de realimentação no sistema regulador, para o sistema do pêndulo invertido sobre carro. Esse trabalho vislumbra ser uma complementação do material de controle já existente, de maneira a explicar e elucidar as técnicas empregadas de maneira didática, com auxílio das plataformas Matlab® e Simulink® para simulação e projeto das técnicas.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Reproduzir o trabalho de Oppenheim (1987), porém utilizando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz para analisar a implementação dos controladores PID aplicados com ações individuais (P, I, D) e em conjunto (PI, PD e PID) para a planta do pêndulo invertido sobre carro, ao invés do Método do Lugar das Raízes utilizado pelo autor;
- Reproduzir o trabalho de Ogata (2010), utilizando a mesma modelagem matemática e o método de alocação de polos para projetar os controladores PID aplicados com ações individuais (P e D) e em conjunto (PI, PD e PID), ao invés de apenas o ganho Integral (I) para a planta do pêndulo invertido sobre carro;
- Ressaltar prioritariamente a teoria de controle, as técnicas matemáticas e os conceitos empregados para modelar e controlar o sistema abordado. E para todos os casos de controle servo e regulador, simular e apresentar os resultados de controle por meio das plataformas computacionais Matlab® e Simulink®.

1.3 METODOLOGIA

O primeiro sistema de controle a ser desenvolvido e empregado para a planta do pêndulo invertido nesse trabalho, será o servossistema com as ações de controle PID inseridas na malha direta entre o comparador de erro e a planta, para complementação do trabalho de Ogata (2010). Mais especificamente, será desenvolvido um servossistema por meio das técnicas de modelagem e controle do domínio do tempo para tentar controlar um sistema completamente instável em malha aberta.

Como no domínio do tempo as técnicas de controle permitem controlar sistemas de única entrada e múltiplas saídas (caso do pêndulo invertido sobre carro) pretende-se controlar tanto a posição da haste como a posição do carro. Inicialmente, o sistema será modelado por equações diferenciais e posteriormente por espaço de estados. O projeto da técnica de controle será feito pelo método de alocação de polos que tem como restrição de que o sistema tem que ser de estado completamente controlável. Se essa restrição for atendida, escolhendo adequadamente a localização dos polos o sistema poderá ser levado à estabilidade.

O projeto de um servossistema do tipo 1 - caso em que a planta do sistema não possui integrador – foi desenvolvido e apresentado por Ogata (2010). Isto é, como o princípio básico de projeto de um servossistema do tipo 1 é inserir o integrador no ramo direto entre o comparador de erro e a planta do sistema, os resultados de controle foram apresentados apenas com o Ganho Integral. Cabe ressaltar que, conforme apresentado pelo autor o sistema é estabilizado com desempenhos satisfatórios e a resposta respeita os critérios de projeto adotados.

No entanto, o objetivo desse trabalho é realizar uma análise detalhada do comportamento e estabilidade do sistema para os casos em que as ações de controle Proporcional e Derivativa são empregadas individualmente ao retirar a ação do integrador. Bem como, dessas ações em conjunto com, e sem, a ação integral. Resumindo, pretende-se apresentar os resultados alcançados ao aplicar as ações de controle P, D, PI, PD e PID pela modelagem em espaço de estados e utilizando-se, em especial, o método de alocação de polos. Por efeitos de comparação de resultados, os critérios adotados para o projeto dessa técnica serão idêntico aos de Ogata (2010). Definido isto, a faixa de valores da matriz de retroação de estados K

terá valores pré-definidos, cabendo ao projetista escolher os valores dos ganhos que estão como variáveis.

O segundo sistema de controle que será desenvolvido para o sistema do pêndulo invertido sobre carro, é o sistema regulador para complementação do trabalho de Oppenheim (1987). Para esse caso, as ações de controle PID serão inseridas na malha de realimentação do sistema. Pois, por serem bastante desconhecidos os efeitos dessa técnica de controle, o assunto é pouco abordado e comentado.

Como as técnicas de controle do domínio da frequência só podem ser aplicadas a sistemas de única entrada e única saída, pretende-se com esse método controlar apenas a posição da haste do pêndulo, e para tanto, pressupõe-se que o carro é livre para se mover no plano da página. O sistema é composto por uma única entrada que é a força aplicada ao móvel e a saída que desejamos controlar é a posição do pêndulo.

Cabe ressaltar, que esse método de controle foi desenvolvido e apresentado pelo autor em uma das aulas do curso online de Sinais e Sistemas pelo MIT (*Massachusetts Institute of Technology*). E como apresentado pelo autor, foram proposto os controles P, D e PD genericamente para o sistema do pêndulo invertido sobre carro. A análise de estabilidade desses sistemas foi realizada muito didaticamente pelo método do lugar das raízes, estabelecendo as faixas de ganhos que o sistema se estabilizaria ou não.

No entanto, o objetivo desse trabalho é realizar uma análise do comportamento e estabilidade do sistema para os casos em que a ação Integral não foi empregada, bem como, analisar também os casos tratados pelo autor de maneira numérica, e não algébrica. Resumindo, pretende-se apresentar os resultados alcançados ao aplicar as ações de controle P, D, I, PI, PD e PID pela modelagem em função de transferência e diagrama de blocos, utilizando-se do Critério de Routh-Hurwitz para analisar a estabilidade dos sistemas. Esse critério de estabilidade foi escolhido, pois o objetivo do trabalho é descrever para todas as ações de controle PID inseridas na malha de realimentação do regulador, se o sistema é estável ou não. Isto é, não faz parte do objetivo do trabalho procurar os melhores parâmetros de ganhos para o sistema, e sim, definir a faixa de ganhos em que o sistema se estabiliza.

Durante todo projeto e desenvolvimento das técnicas de controle, para facilitar o cálculo de parte das implementações e simular os resultados de desempenhos obtidos, serão utilizadas as plataformas computacionais Matlab® e Simulink®.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esse trabalho está organizado em 6 capítulos conforme segue:

- **Capítulo 1:** Apresenta uma breve introdução sobre a teoria de controle, sobre o sistema que será utilizado no trabalho (pêndulo invertido), a problemática e a justificativa da realização do trabalho, os objetivos para se cumprir no desenvolvimento e a metodologia adotada para alcançar os objetivos;
- **Capítulo 2:** É apresentado nesse capítulo a revisão bibliográfica sobre o conceito histórico da teoria e práticas de controle e dos conceitos que serão utilizados para entendimento desse trabalho. Também é apresentado a importância da modelagem matemática, e as respectivas técnicas de controle e modelagem nos domínios do tempo e frequência. A última parte do capítulo, descreve um modelo de sistema do pêndulo invertido sobre carro. Como também, apresenta pequenas resenhas bibliográficas sobre trabalhos que aplicaram técnicas de controle nesse sistema;
- **Capítulo 3:** São apresentados os resultados e discussões da complementação do trabalho de Ogata (2010). Isto é, do desenvolvimento modelagem e simulação do sistema de controle servo para a planta do pêndulo invertido;
- **Capítulo 4:** Análogo ao capítulo 3, são apresentados os resultados e discussões do trabalho de Oppenheim (1987) . Ou seja, o desenvolvimento, modelagem e simulação do sistema de controle regulador para a planta do pêndulo invertido;
- **Capítulo 5:** É apresentada a conclusão final do trabalho, ou seja, se o trabalho desenvolvido está conformidade com os objetivos e respondeu a problemática satisfatoriamente;
- **Capítulo 6:** São apresentadas as referências utilizadas direta e indiretamente para o desenvolvimento do trabalho em todo.

2 REVISÃO DA LITERATURA

No primeiro tópico desse capítulo é levado em conta a apresentação do conceito histórico da teoria e práticas de controle, a fim de lembrar que a teoria de controle pode ser nova (aproximadamente de 1900 até os dias atuais), porém as práticas de controle já eram estudadas e implementadas desde muito tempo atrás.

Nos tópicos 2.2, 2.3 e 2.4 serão apresentados os conceitos de controle primordiais, e que, podem aparecer durante o desenvolvimento do trabalho. Os conceitos e motivos da modelagem matemática para sistemas dinâmicos, como também, as técnicas utilizadas para análise de estabilidade dos sistemas de controle desenvolvidos nesse trabalho.

No último tópico, é apresentado sobre o sistema do pêndulo invertido, bem como, é relatado em forma de pequenas resenhas bibliográficas, por ordem cronológica, sobre alguns trabalhos realizados à respeito de diferentes técnicas de controle aplicadas a esse sistema. Será visto que, a maioria das técnicas aplicadas envolvem o clássico controle PID para efeitos de comparação com outras técnicas ou mesmo para atender alguns critérios de projeto pré-estabelecidos.

2.1 HISTÓRICO DA TEORIA E PRÁTICAS DE CONTROLE

O método de controle por realimentação originou-se desde antes da humanidade em si, quando diversos sistemas de controle biológicos foram desenvolvidos nos mais primitivos habitantes do planeta terra (NISE, 2011). Também de acordo com a mesma ideia, os autores Dorf e Bishop (2011) relatam que os sistemas de controle com retroação têm existido desde tempos muito antigos. Ainda entre o período entre 300 a 1 a.C na Grécia, houve aplicações no desenvolvimento de mecanismos reguladores de boia, e no primeiro século d.C houve a publicação do livro titulado "*Pneumática*" de Heron de Alexandria que ressaltava formas de mecanismos de nível da água utilizando reguladores de boia.

De acordo com (NISE, 2011) entre os séculos XVI e XVII, na Europa, foram inventados os primeiros sistemas de controle com realimentação para controle de temperatura por Cornelis Drebbel (1572-1633) e para controle de pressão por Dennis Papin (1647-1712).

Christian Huygens e Robert Hooke no final do século XVII apresentaram o trabalho sobre as oscilações do pêndulo “*The oscillations of the Pendulum*” como um dos mais modernos desenvolvimentos na teoria do controle da época. O objetivo deles era de conseguir uma medição apurada de tempo e localização, características que seriam bem apreciadas na navegação (FERNÁNDEZ-CARA e ZUAZUA, 2003).

No século XVIII foi desenvolvido o primeiro trabalho considerável em controlador automático por James Watt, que construiu um controlador centrífugo para controlar a velocidade de uma máquina de vapor, chamado pêndulo de Watt (SOBRINHO, 2011). Ainda nesse mesmo século, Pierre Laplace idealizou a transformada de Laplace, à base de diversos procedimentos de análise e projeto de sistemas (TEIXEIRA, 2006).

A teoria dos sistemas de controle conhecida hoje, começou a se desenvolver durante o século XIX. No ano de 1868, James Clerk Maxwell fez uma publicação sobre o critério de estabilidade para um sistema de terceira ordem utilizando-se de coeficientes da equação diferencial (NISE, 2011). Na mesma época Routh e Hurwitz elaboraram a técnica de Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, que permite determinar a estabilidade de um sistema sem necessidade de solucionar a equação (SOBRINHO, 2011).

Também segundo Sobrinho (2011), o russo A. Lyapunov em 1897 publicou um trabalho sobre estabilidade, de grande importância para a teoria de controle, que teve pouca divulgação no ocidente. Dessa forma, a União Soviética teve grandes avanços na teoria de sistemas não-lineares estudando e implementando os métodos de Lyapunov.

Já no século XX, diversas instituições renomadas tomaram consciência da importância do controle automático. Isso ocorreu na American ASME (Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos) e na British IEE (Instituição de Engenheiros Elétricos) (FERNÁNDEZ-CARA; ZUAZUA, 2003).

O termo “*feedback*” (realimentação) foi apresentado à engenharia de sistemas por Harold Black nos laboratórios da “*The Bell Telephone*” na década de 1920. A realimentação descreve os processos de regulação na engenharia e nos diversos sistemas nas áreas biológicas, econômicas, social e política – especificamente em todos os lugares onde a informação é medida e comparada com a entrada. Não deve-se levar ao julgamento de que “*feedback*” só representa a obtenção de

informações sobre o resultado do seu funcionamento. Pois, existe uma ampla aplicação do termo, desde simples sistemas de equipamentos elétricos até sistemas complexos, como, naves espaciais e robôs (LURIE e ENRIGHT, 2000).

Em 1922, Nicolas Minorsky realizou pesquisas e apresentou como a estabilidade poderia ser determinada por meio das equações diferenciais que descrevem o funcionamento do sistema. Minorsky trabalhou também com controladores automáticos para pilotagem de embarcações (OGATA, 2010). Assim, grande parte da teoria geral empregada nos dias de hoje para melhorar o desempenho dos sistemas de controle automático é remetida a Nicholas Minorsky. Foi o seu desenvolvimento teórico aplicado à direção automática dos navios que levou ao desenvolvimento dos controladores PID (Proporcional, Integral e Derivativo) (NISE, 2011).

Ainda antes da Segunda Guerra Mundial, nos Estados Unidos a teoria e prática de controle com retroação teve incentivo devido ao desenvolvimento do sistema telefônico e dos amplificadores eletrônicos. O domínio da frequência foi usado para descrever a operação desses sistemas, pela aplicação dos métodos de Bode, Nyquist e Black desenvolvidos pelos engenheiros nos laboratórios da “*The Bell Telephone*”. Já na União Soviética, os matemáticos e mecânicos inspiraram-se no domínio do tempo usando equações diferenciais e dominaram o campo da teoria de controle na época (DORF e BISHOP, 2011).

Durante a Segunda Guerra Mundial e nos anos seguintes, os engenheiros e cientistas aperfeiçoaram suas experiências sobre os mecanismos de controle e rastreamento de aviões e mísseis balísticos, bem como, de outros projetos. Isto gerou um importante desenvolvimento de métodos abordados no domínio da frequência (FERNÁNDEZ-CARA;ZUAZUA, 2003).

Durante as décadas de 1940 e 1950 muitos sistemas de controle industrial utilizava os controladores PID (Proporcional, Integral e Derivativo) para o controle de pressão, temperatura, nível, entre mais. Nessa mesma época, Ziegler e Nichols desenvolveram as Regras de Ziegler-Nichols para sintonização dos controladores PID, e Walter Richard Evans apresentou o método do Lugar das Raízes (OGATA, 2010).

Segundo Sobrinho (2011), no final dos anos 1950, a teoria e práticas de controle se encontrava bastante consolidada, com fortes tendências do uso das técnicas baseadas no domínio da frequência devido ao aumento do uso da

transformada de Laplace e do plano de frequência complexa, constituindo-se então a Teoria de Controle Clássico. Fundamentada nos Diagramas de Bode, Nyquist e Nichols, Método do Lugar das Raízes, entre mais técnicas de resposta em frequência.

A Segunda Guerra Mundial esclareceu que os modelos considerados até aquele momento não eram precisos o suficiente para descrever um sistema o mais próximo do real. Pois, os sistemas na realidade são normalmente não-lineares, muito complexos e sujeitos à ruídos. Isso acarretou em uma busca por métodos que pudessem lidar melhor com esses sistemas (FERNÁNDEZ-CARA;ZUAZUA, 2003).

Essas técnicas de controle clássico que utilizavam do domínio da frequência foram, na maior parte delas, limitadas para sistemas lineares invariantes ao tempo com entradas e saídas únicas. Somente a partir da década de 1950 a teoria de controle começou a desenvolver poderosas técnicas que permitiam lidar com sistemas multivariáveis variantes no tempo, bem como diversos problemas complexos e não-lineares. Baseada nas contribuições de Richard Bellman que desenvolveu a programação dinâmica e Rudolf Kalman com filtros, controle linear quadrático ótimo e análise algébrica, nos Estados Unidos e por L. Pontryagin que contribuiu com o controle ótimo não-linear na União Soviética, formou-se a base para uma enorme base de estudo e pesquisa durante a década de 1960, que continua até hoje. Essas foram as principais contribuições para o surgimento da teoria de controle moderno, baseada no domínio do tempo (SONTAG, 1998).

Com a chegada da era espacial a demanda por novas técnicas de controle impulsionou o desenvolvimento dos fundamentos da Teoria de Controle Moderno utilizando-se do domínio do tempo. Os métodos de Liapunov, Minorsky, entre outros, se tornaram importantes objetos de estudo na teoria de controle. Utilizando do espaço de estados e de equações diferenciais, os sistemas mesmo complexos e com múltiplas entradas e múltiplas saídas se tornam mais acessíveis para lidar com eles (SOBRINHO, 2011). Na teoria de controle moderno os sistemas são representados no domínio do tempo por equações diferenciais através do espaço de estado. As principais vantagens dessa forma de abordagem foram permitir sistemas complexos e compostos de múltiplas entradas e múltiplas saídas, assim como, foi eficaz nos avanços da tecnologia de computadores digitais (WILLIAMS II e LAWRENCE, 2007).

Não encerrando o constante processo de desenvolvimento, a teoria de controle entre o período de 1980 e 1990 foi caracterizado por técnicas de controle que envolviam tanto o domínio da frequência quanto o domínio do tempo. Exclusivamente, o desempenho no domínio da frequência foi incrementado graças aos avanços teóricos que produziram ferramentas para lidar com sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas. Para o domínio do tempo, os avanços foram as técnicas elaboradas para o desenvolvimento de controladores. Resumindo, fundiram técnicas dos controles clássico e moderno formando uma nova e poderosa teoria de controle (WILLIAMS II e LAWRENCE, 2007).

Torna-se incontestável nos dias de hoje, o fato de existirem sistemas de controle com um nível de complexidade muito maior e com problemas de instabilidade e não linearidade. Portanto, para o projeto desses sistemas são necessários métodos que envolve tanto o domínio da frequência quanto o domínio do tempo, caracterizando assim a Teoria de Controle Robusto que matematicamente é uma teoria muito complexa (OGATA, 2010).

Atualmente, há outras teorias de controle além das três teorias citadas anteriormente. Devido a necessidade de controlar sistemas cada vez mais complexos, surgem técnicas mais apuradas a cada dia. O controle baseado em conhecimento “*knowledge-control based*” apresenta um comportamento inteligente, pois não utiliza apenas métodos matemáticos para manter o sistema sobre controle. Esse método garante resultados satisfatórios, boa estabilidade, suporte à perturbações externas na maioria das vezes. Como não é um método perfeito, este é sujeito a falhas devido à falta de informações, parâmetros mal apresentados, algoritmos defeituosos, entre outros. A teoria de controle inteligente, alternativa para o controle baseado em conhecimento, é baseado em técnicas de inteligência artificial. O comportamento do sistema é descrito de maneira qualitativa e não quantitativa, permitindo aplicar a experiência humana nos processos obtendo um desempenho mais satisfatório (GOPAL, 2003).

2.2 TEORIA DE CONTROLE

O termo “*controle*” tem diversos significados e muitas das vezes diverge nas mais diversas comunidades científicas. Uma definição de controle, entre as inúmeras, é a aplicação e o uso de algoritmos e realimentação em sistemas de

engenharia. Em geral, *controle* é uma ciência da informação que envolve o uso e transmissão de informações de forma analógica ou digital (ÅSTRÖM, 2008).

Quando utilizamos a palavra “*controle*” no dia a dia, involuntariamente estamos nos referindo ao ato de alcançar um resultado previsto. Dada essa vasta definição, o *controle* abrange diversos sistemas em uma ampla gama de áreas como: as engenharias, a biologia, a medicina, a economia, a ciência da computação, as ciências sociais, a automação, entre mais (TEWARI, 2002).

Na teoria de controle os objetos de estudo são os sistemas. Os sistemas, num sentido generalizado, são ferramentas que através de uma entrada produzem uma saída (ANDERSON, 2009). A teoria de controle foi desenvolvida conforme surgia a necessidade da substituição de mão de obra humana nas atividades da época, dando origem ao controle automático. O controle automático é um conjunto de diversos componentes com o objetivo de atuar a favor de um sistema global fazendo-o comportar-se de maneira automática conforme uma pré especificada configuração. Uma característica particular do controle automático é que esse reduz, em taxas admissíveis, a participação direta da ação humana nas tarefas a serem realizadas (PARASKEVOPOULOS, 2002; LEIGH, 2004).

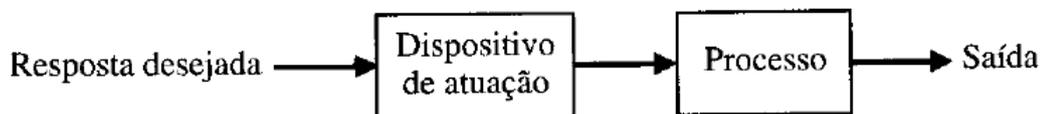
Um sistema de controle na forma mais básica é formado por um sistema a ser controlado (planta), um controlador, o valor de referência (entrada) e o valor esperado (saída). A finalidade de um controlador em um sistema de controle é, na medida do possível, fazer com que planta atenda a um conjunto de especificações para alcançar um resultado esperado. Estes dois componentes, planta e controlador, são os dois elementos essenciais de um sistema de controle (SILVA, 2009).

Segundo Ogata (2010), o controle automático tem desempenhado um papel fundamental no avanço da engenharia e ciência, tornando-se um importante integrante dos processos residenciais e industriais. Atualmente, as teorias de controle compreendem diversas abordagens como: controle clássico, controle moderno, controle robusto, controle adaptativo, entre outras. Para o entendimento da teoria de controle em geral, alguns conceitos têm de ser conhecidos:

- **Variável controlada e sinal de controle:** A variável controlada é o parâmetro ou condição a ser medida e controlada. O sinal de controle é o parâmetro modificado pelo controlador, que afeta diretamente na variável controlada (OGATA, 2010);

- **Planta:** Qualquer objeto físico de controle (um processo, um sistema ou um dispositivo) é chamado de planta de controle e tratado uniformemente independentemente da sua natureza e do grau de complexidade (BUBNICKI, 2005);
- **Processos:** Toda operação que irá ser controlada (OGATA, 2010);
- **Sistemas:** Conjunto de componentes que agem de forma conjunta para alcançar determinado objetivo, podendo ser de forma física ou aplicado a fenômenos abstratos dinâmicos (ANDERSON, 2009);
- **Distúrbios:** São os sinais que afeta negativamente na variável de saída do sistema, podendo ser interno caso for gerado dentro do sistema, ou externo caso gerado fora do sistema sendo considerado como outro sinal de entrada (D'AZZO e HOUPIS, 2003);
- **Controle em Malha Aberta (*Open loop*):** São os sistemas no qual o sinal de saída não exerce nenhuma função de controle no sistema. Ou seja, o sinal de saída não é medido nem mesmo realimentado para comparação com o sinal de entrada, representado na Figura 1 (ÅSTRÖM, 2008; OGATA, 2010);

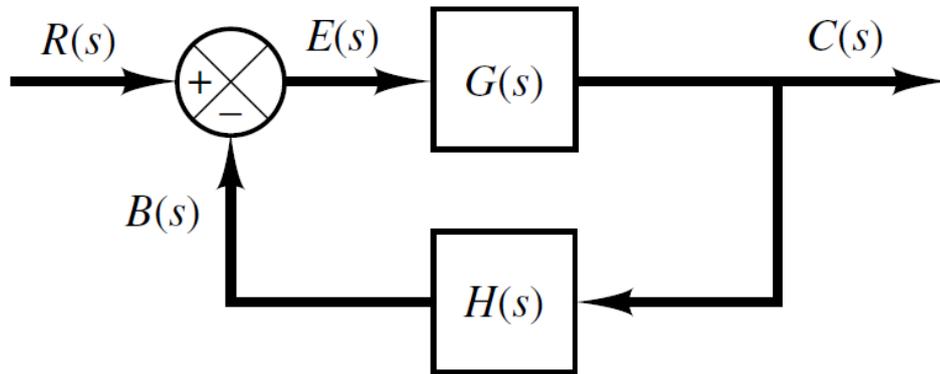
Figura 1 - Sistema de controle em malha aberta



Fonte: Dorf e Bishop (2011)

- **Controle em Malha Fechada (*Closed Loop*):** São os sistemas comumente chamados, Sistemas com Realimentação, no qual o sinal de saída exerce uma função de controle no sistema. Ou seja, há um sinal de erro atuante que é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída (ou parcela do mesmo caso passe por processos de integração ou derivação) que realimenta o controlador. O sinal de erro atuante tem a função de minimizar o erro e corrigir o sinal de saída do sistema, conforme a Figura 2 (ÅSTRÖM, 2008; OGATA, 2010);

Figura 2 - Sistema de controle em malha fechada



Fonte: Ogata (2010)

- **Sistemas Lineares:** Um sistema é dito linear se os princípios da homogeneidade e da aditividade forem aplicáveis a ele. Ou seja, a resposta causada pela aplicação de duas entradas simultaneamente tem que ser a mesma que a soma da saída quando as duas entradas forem aplicadas em tempos distintos. E caso a entrada for multiplicada por uma constante, a saída também deve ser multiplicada pela mesma constante (SILVA, 2009; JAGAN, 2008);
- **Sistemas Não Lineares:** É composto por pelo menos um elemento não linear e não satisfaz o princípio da superposição. Seu comportamento depende da amplitude dos sinais à ele aplicado (SILVA, 2009; JAGAN, 2008);
- **Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LTI):** Esses sistemas são caracterizados dessa forma, caso seja representado por equações diferenciais, dos quais os coeficientes são funções do tempo (OGATA, 2010);
- **Sistemas SISO (Single Input and Single Output):** Sistemas compostos por uma única entrada e uma única saída (MANDAL, 2006; OGATA, 2010);
- **Sistemas SIMO (Single Input and Multiple Outputs):** Sistemas compostos por uma única entrada e múltiplas saída (MANDAL, 2006; OGATA, 2010);
- **Sistemas MISO (Multiple Inputs and Single Output):** Sistemas compostos por uma única entrada e múltiplas saídas (MANDAL, 2006; OGATA, 2010);
- **Sistemas MIMO (Multiple Input and Multiple Output):** Sistemas compostos por múltiplas entradas e múltiplas saídas (MANDAL, 2006; OGATA, 2010);
- **Modelos Matemáticos:** Os modelos matemáticos podem assumir diversas formas, ou seja, dependendo das características particulares do sistemas

utiliza-se de ferramentas analíticas e/ou computacionais de formas distintas (FELÍCIO, 2010);

- **Servossistema:** Um servossistema ou, de forma genérica, sistema de controle com realimentação é uma combinação de elementos para controlar uma fonte de potência. No qual, a variável controlada ou uma parcela desta é retroalimentada, para comparação com a variável desejada ou parcela desta. A desigualdade entre os valores medidos é utilizada para controlar a potência e não há variações na carga (JAMES, NICHOLS e PHILIPS, 1947; MANDAL, 2006; OGATA, 2010);
- **Sistema Regulador:** É um sistema de controle com realimentação, em que, a variável de referência ou de comando é constante e há variações na carga (BOTTURA, 1982; MANDAL, 2006; OGATA, 2010);

Em relação ao servossistema, quando utilizado para controlar um movimento mecânico, este é denominado um servomecanismo. Os termos “*sistemas reguladores*” e “*servomecanismos*” são bastante utilizados por motivos históricos. Mesmo que não haja diferença significativa na análise ou síntese de qualquer outro tipo de sistemas com realimentação (BOTTURA, 1982).

2.2.1 Resposta temporal dos sistemas de controle

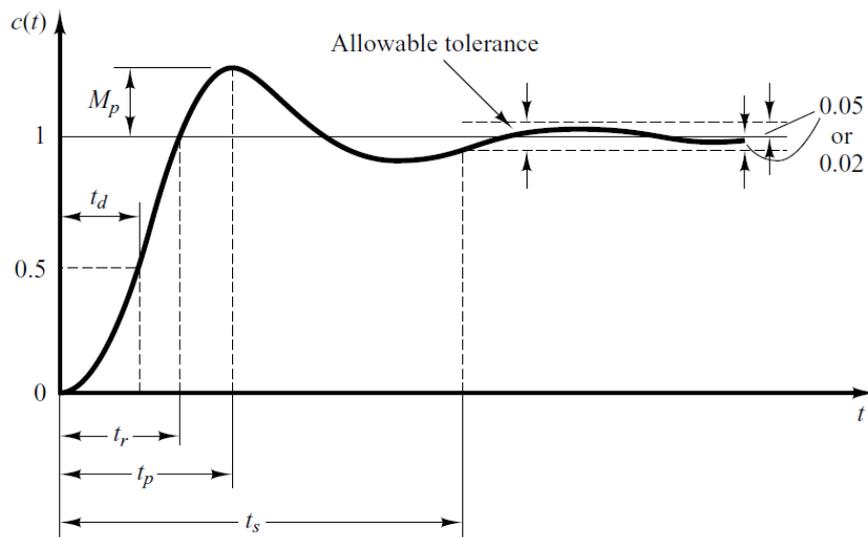
Em relação ao comportamento e avaliação das respostas alcançadas no projeto de sistemas de controle, a resposta temporal desses sistemas é composta por duas parcelas: A resposta transitória e a resposta estacionária (PARASKEVOPOULOS, 2002; OGATA, 2010; JAGAN, 2008; DORF e BISHOP, 2011).

- **Resposta Transitória:** É a resposta temporal do sistema que compreende desde o estado inicial ao estado final;
- **Resposta Estacionária:** É o comportamento do sinal de saída quando o tempo t tende ao infinito.

Normalmente, as características de desempenho de um sistema de controle são medidas em relação ao comportamento da sua resposta transitória a uma entrada degrau. Por motivos práticos frequentemente adota-se as condições iniciais

nulas que é o comportamento do sistema em repouso. Antes de atingir o estado estacionário a resposta transitória apresenta, geralmente, oscilações amortecidas e alguns parâmetros devem ser analisados para verificação de desempenho. Abaixo são definidos os parâmetros a serem considerados, Figura 3, em sistemas de segunda ordem (PARASKEVOPOULOS, 2002; TEWARI, 2002; JAGAN, 2008; OGATA, 2010):

Figura 3 - Parâmetros a serem considerados na resposta transitória



Fonte: Ogata (2010)

- **Tempo de Atraso t_d :** Tempo em que a resposta do sistema leva para atingir a metade do seu valor máximo;
- **Tempo de subida t_r :** Tempo em que a resposta do sistema leva para atingir seu valor esperado, 0% a 100% por exemplo;
- **Tempo de pico t_p :** Tempo em que a resposta do sistema leva para atingir seu valor máximo (pico de sobressinal);
- **Máximo sobressinal M_p :** É o valor máximo de pico da curva da resposta. Esse valor aponta diretamente a estabilidade relativa do sistema. Quanto maior, pior para o sistema pois representa um erro de resposta maior;
- **Tempo de acomodação t_s :** Tempo necessário para que a curva da resposta alcance uma faixa de valor (*allowable tolerance*) tolerável, normalmente adotada de 2% ou 5%, em torno do valor final (resposta estacionária).

Para sistemas de ordem superior a dois (Caso do pêndulo invertido abordado nesse trabalho), a resposta transitória é a soma das respostas de sistemas de

primeira e segunda ordem. Para o caso desses sistemas, é necessário uma análise na função de transferência do sistema. Especificamente, nos zeros e polos do sistema em malha fechada. O tipo da resposta transitória é determinada pelos polos de malha fechada, enquanto que, a forma da resposta transitória é determinada especialmente pelos zeros de malha fechada. Os polos que possuem efeitos dominantes sobre o comportamento da resposta transitória de um sistema, são chamados polos dominantes de malha fechada. Esses polos são os de maior relevância entre todos os outros polos de malha fechada. Geralmente, os polos dominantes de um sistema são dados na forma de um par complexo conjugado. A análise de estabilidade a partir da localização dos polos de um sistema, é que se qualquer um desses polos estiver no semiplano direito do plano s o sistema é instável. Portanto, o ganho de um sistema de controle é normalmente ajustado para que os polos se situem à esquerda do semiplano complexo s , levando o sistema à estabilidade (PARASKEVOPOULOS, 200; TEWARI, 2002; OGATA, 2010).

2.2.2 Ações de controle PID (Proporcional-Integral-Derivativo)

Atualmente, diversos projetos de sistemas de controle aplicam três modos de controle no sistema, cujo resultado é a soma das ações Proporcional, Integral e Derivativo (PID). O controle PID é de longe o método mais comum utilizado nos sistemas de controle, dado que, cerca de 90-95% de todos problemas de controle podem ser resolvidos com esse método. A utilidade do controle PID está ligado à sua aplicabilidade, robustez e facilidade de implementação em uma ampla faixa de operação (TEWARI, 2002; OGATA, 2010; LEVINE, 2011; DORF e BISHOP, 2011).

O princípio desse método é de compensar o erro do sistema quando se compara a diferença entre a referência adotada e a saída do processo. As três ações de controle PID agem de maneira diferente no erro e cada uma possui um objetivo de controle diferenciado. A Função de transferência que descreve essa técnica de controle é dada pela equação a seguir, e o diagrama de blocos na Figura 4 (SILVA, 2009; PARASKEVOPOULOS, 2002):

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_p s + K_i + K_d s^2}{s} = \frac{K_d \left[s^2 + \frac{K_p}{K_d} s + \frac{K_i}{K_d} \right]}{s} \quad (1)$$

$$G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right], \text{ onde } T_i = \frac{K_p}{K_i}, T_d = \frac{K_d}{K_p}$$

Onde,

G_c = função de transferência do controle PID;

K_p = ganho Proporcional;

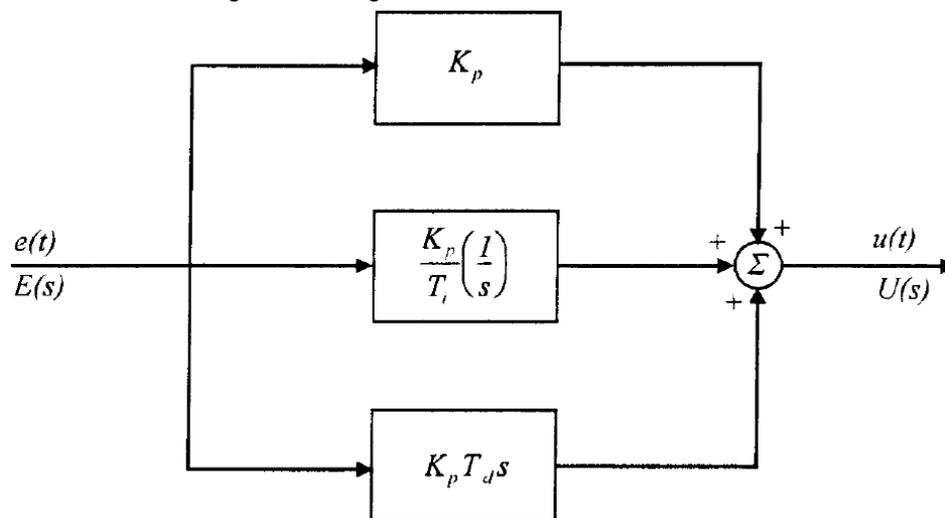
K_i = ganho Integral;

K_d = ganho Derivativo;

T_i = constante de tempo integral;

T_d = constante de tempo derivado.

Figura 4 - Diagrama de blocos do controle PID



Fonte: Paraskevopoulos (2002)

A função de transferência do método de controle PID possui 1 polo na origem e dois zeros, reais ou complexos conjugados, cuja posição dependem dos parâmetros K_p , K_i , ou K_p , T_i e T_d conforme a equação 2. No domínio do tempo, a equação 1 pode ser descrita em função da saída e entrada do sistema na equação 3. Sendo cada termo representado por seu respectivo ganho, proporcional, integral ou derivativo, atuando na constante de erro (PARASKEVOPOULOS, 2002; DORF e BISHOP, 2011; CASTRUCCI, 2011).

$$s_{1,2} = \frac{-T_i \pm \sqrt{T_i^2 - 4T_i T_d}}{2T_i T_d} \quad (2)$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3)$$

A ação de controle proporcional (P), K_p , é responsável por atuar diretamente no erro do sistema. Esta é a forma mais simples de compensar um sistema e consiste na variação da constante de ganho de malha aberta. Como esse ganho funciona como um amplificador de ganho K , essa ação de controle possui capacidades limitadas em relação a melhorar a performance de um sistema. Quando aplicada individualmente, as únicas funções permitidas é aumentar ou diminuir o ganho K . Dessa maneira, quando aumenta-se esse ganho o estado estacionário dos sistemas diminuem. Porém, quando esse ganho é muito alto, o sistema tende à instabilidade. Como os objetivos de controle normalmente são de diminuir o erro de estado estacionário e aumentar a margem de ganho de fase, apenas com o ganho Proporcional (P) esses dois parâmetros são conflitantes, ou seja, quando melhoramos um o outro é prejudicado (BOTTURA, 1982; PARASKEVOPOULOS, 2002; TEWARI 2002; LEVINE, 2011).

A ação de controle Integral (I), K_i , é responsável por atuar na integração do sinal atuador no sistema. Esse modo de controle é normalmente empregado para melhorar a precisão da resposta estacionária, podendo no entanto, agravar a resposta transitória do sistema. Os controladores com ação integral são considerados de controle dinâmico, pois suas saídas são em função do tempo da variável de entrada, ou seja, sua saída é proporcional à integração do erro ao longo do tempo de integração. Essa ação de controle pode ser empregada como um recurso que “reseta” o termo imposto pelo controlador puramente proporcional, como também, adiciona um polo na origem da função de transferência do sistema. Isso causa uma alteração na estabilidade e velocidade de resposta do sistema, por isso, normalmente não se aplica o modo integral sozinho (ÅSTRÖM, 2008; OGATA, 2010; KAGUEYAMA, 2011).

Num controlador de ganho puramente Proporcional aplicado a uma planta sem integrador, existe um erro de estado estacionário. Dessa forma, caso a resposta transitória de um sistema de controle for aceitável, porém a resposta estacionária não, pode-se melhorar a resposta do sistema adicionando um ou mais polos na origem do plano complexo s . O caso mais simples é adicionar um polo na origem e um zero próximo a origem, aumentando assim o tipo do sistema sem modificar muito

a sua dinâmica. Esse caso representa a ação de controle Proporcional (P) em série com a ação Integral (I), K_i , criando o comumente chamado compensador Proporcional-Integral (PI). Com a ação Integral inserida no sistema um erro positivo gerado pela ação Proporcional leva a um aumento do sinal de controle, bem como, um erro negativo diminui o sinal de controle independente do tamanho do erro. Portanto, o controle Integral é mais adequado quando a precisão na resposta estacionária de um sistema é prioridade. As consequências da inserção do ganho Integral pode comprometer a estabilidade relativa de um sistema quando aumenta-se o tipo do sistema (BOTTURA, 1982; D'AZZO e HOUPIS, 2003; JAGAN, 2008).

A ação de controle Derivativa (D), K_d , é responsável por atuar na derivação do sinal de erro no sistema. Ou seja, a ação de controle gerada é proporcional à taxa de variação do erro no tempo, e por isso, estima a tendência de aumento ou diminuição do erro no futuro. Geralmente, pretende-se inserir essa ação de controle para melhorar a estabilidade do sistema em malha fechada, devido a sua característica antecipativa, ou, preditiva e corrigir mais rápido o erro. Esse modo só age quando há variações do erro no tempo, ou seja, se o erro for constante esse ação de controle não atua. Por esse motivo, esse modo normalmente não é empregado sozinho em um sistema (ÅSTRÖM, 2008; OGATA, 2010; KAGUEYAMA, 2011).

Quando o objetivo de controle para um sistema é melhorar a resposta transitória através de um controlador de alta sensibilidade, é necessário modificar o lugar das raízes para movê-lo mais para a esquerda do eixo imaginário. Essa técnica pode ser obtida pela adição de um ou mais zeros na função de transferência do sistema. O caso mais simples é com a adição de um zero, obtido pela manipulação do sinal atuador, produzindo um sinal que é proporcional a magnitude e a taxa de variação (derivada) do sinal. A taxa de variação do sinal funciona de maneira que o sinal de erro dê a informação se o sobressinal de um sistema aumenta ou diminui, ou seja, esse modo de controle funciona de maneira antecipatória. Isso significa que essa ação de controle é baseada na extrapolação linear do erro com T_d unidades de tempo à frente. Essa compensação é chamada Proporcional-Derivativa (PD), pois envolve ambas ações de controle, K_p e K_d , sendo cada uma atuante na sua respectiva função em relação ao erro. Uma desvantagem da inserção da parcela de controle Derivativa é que o sistema pode produzir uma correção “antecipativa” muito alta, antes mesmo, que o erro se torne grande o

suficiente (BOTTURA, 1982; D'AZZO e HOUPIS, 2003; OGATA, 2010; LEVINE, 2011).

Em muitos casos de controle de sistemas é necessário satisfazer especificações mais exigentes, ou seja, desempenhos satisfatórios tanto na resposta transitória como na resposta estacionária. Para esses casos, é necessário combinar os efeitos de compensação de ambos compensadores, PI e PD, obtendo finalmente o controle PID. Neste modo de controle o sinal de controle é uma combinação linear do sinal atuador mais a integral e derivada desse sinal. Essa combinação permite que o desempenho da ação proporcional K_p , que sozinha produz demasiado erro de estado estacionário, em conjunto com as ações integral K_i , que era limitada caso o tipo do sistema fosse três ou mais, e derivativa K_d , que aumentava as oscilações do sistema, possam trabalhar em conjunto para obter desempenhos satisfatórios tanto na resposta transitória como na resposta estacionária (BOTTURA, 1982; PARASKEVOPOULOS, 2002; JAGAN 2008).

Em resumo, os efeitos das ações Proporcional, Integral e Derivativa no desempenho dos sistemas de controle, em relação a resposta temporal, são listadas abaixo e conforme a tabela 1 (FAJAR, 2013):

- Ação de Controle Proporcional K_p : Reduz significativamente, mas nunca permanente, o tempo de subida e o erro de estado estacionário;
- Ação de Controle Integral K_i : Elimina o erro de estado estacionário, mas pode afetar negativamente a resposta transitória;
- Ação de Controle Derivativa K_d : Aumenta a estabilidade do sistema, reduz o sobressinal máximo e melhora a resposta transitória.

Tabela 1 - Efeitos das ações de controle PID na resposta temporal do sistema

Ação de controle	Tempo de Subida	Sobressinal	Tempo de Acomodação	Erro de Estado Permanente
K_p	Reduz	Aumenta	Pouca variação	Reduz
K_i	Reduz	Aumenta	Aumenta	Elimina
K_d	Pouca variação	Reduz	Reduz	Pouca variação

Fonte: Modificada pelo Autor (FAJAR, 2013)

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA PARA SISTEMAS DE CONTROLE

Obter modelos matemáticos que descrevem as características de um sistema físico e complexo é satisfatório, pois, geralmente esses sistemas são de natureza contínua no tempo e as equações matemáticas que os descrevem são as do tipo diferenciais, sendo possível utilizar da Transformada de Laplace para simplificar a solução dessas (RIBEIRO, 2007).

Segundo Trivelato (2003), alguns conceitos para modelagem são:

Modelagem, de forma geral, é a elaboração de um modelo para a representação de alguma coisa. Modelo é a representação de um sistema real ou imaginário usando uma linguagem, um meio, e segundo um posto de vista. O aspecto mais importante de um modelo é a relação simplicidade versus fidelidade. Um modelo é a representação do conhecimento e a principal ferramenta para o estudo do comportamento de sistemas complexos. Modelar é o primeiro passo para a análise de um sistema de qualquer natureza e sob qualquer aspecto. Quando o modelo é uma representação válida de um sistema, informações significativas podem ser retiradas sobre sua dinâmica ou seu desempenho (TRIVELATO, 2003, p. 6).

A modelagem é um processo muito complexo, mas se torna mais fácil se forem conhecidas as características físicas do sistema, as leis que regem o sistema e se o erro for quantificável (TRIVELATO, 2003). O procedimento de descrever um sistema refere-se ao ato de obter uma expressão matemática que relaciona apropriadamente as características físicas do sistema aos componentes do sistema. Esta relação matemática representa o modelo matemático do sistema, logo, permite uma análise mais detalhada do mesmo possibilitando determinar a resposta do sistema para qualquer entrada. Modelar também é útil para outros propósitos como o teste de estabilidade e performance (PARASKEVOPOULOS, 2002).

Para Åström (2008) o modelo de um sistema dinâmico é a representação matemática de um sistema físico, biológico ou de informação. Esses modelos permitem realizar simulações para saber como o sistema se comportará conforme aplicada uma determinada entrada.

Após ter concluído a parte física do sistema de uma maneira significativa para por o sistema em funcionamento, na maioria das vezes, a próxima etapa a ser

seguida é o desenvolvimento de um modelo matemático do processo, a fim de ganhar compreensão do que se pode suceder na prática. Geralmente, mais de um modelo matemático pode ser descrito pelas leis físicas de um único sistema. Um modelo que mais se aproxima do real é aquele desenvolvido de forma mais precisa possível para que possa ser usado em simulações. Portanto, deve-se atentar para o fato de que não é possível modelar matematicamente um sistema de forma perfeita (MANDAL, 2006).

Segundo Felício (2010), o processo de modelagem de sistemas dinâmicos segue a seguinte ideia:

Sabemos que é praticamente impossível descrever todos os aspectos de determinado processo do mundo real. Por isso, temos de decidir quais características considerar e quais ignorar. Esta é a essência da arte de modelar – saber selecionar somente as características, dentre muitas disponíveis, que são necessárias e suficientes para descrever o processo com precisão satisfatória. O engenheiro tem de se preparar para essa tarefa. A obtenção de um modelo válido requer o conhecimento do processo sob estudo e também das técnicas de modelagem (FELÍCIO, 2010, p. 2-3).

Ogata (2010) diz que a modelagem matemática de um sistema dinâmico é definida como um conjunto de equações que regem a dinâmica do sistema com precisão ou pelo menos razoavelmente bem, e que para um determinado sistema não existe uma única modelagem matemática para descrever o seu funcionamento.

Para Dorf e Bishop (2011), a abordagem para os sistemas dinâmicos pode seguir as seguintes etapas:

- Definir o sistema de análise e seus componentes;
- Modelar Matematicamente o sistema e listar as hipóteses possíveis;
- Descrever o sistema em equações diferenciais;
- Resolver as equações diferenciais em função das variáveis de saída desejadas;
- Examinar o resultado e as hipóteses;
- Caso necessário, reformular ou reprojeter o sistema.

2.3.1 Modelagem no Domínio da Frequência

A modelagem no domínio da frequência é o procedimento de modelar um sistema através da sua resposta a sinais sinusoidais e exponenciais. Esta nomenclatura decorre do fato de que a dinâmica do sistema é representada em termos da frequência generalizada s , ao invés da variável tempo t (ÅSTRÖM, 2008).

Na teoria de controle clássico os métodos de controle são comumente denominados técnicas de controle do domínio da frequência. E através das funções de transferência são descritas as relações entre a saída e a entrada desses sistemas por meio de equações diferenciais lineares, invariantes no tempo e com coeficientes constantes. As equações diferenciais que descrevem o comportamento de determinado sistema dinâmico, são obtidas utilizando das leis físicas que o regem. Por exemplo, se o sistema for mecânico são aplicadas as Leis de Newton, se o sistema for elétrico utiliza-se das Leis de Ohm e Kirchhoff (NISE, 2011; CASTRUCCI, 2011).

A função de transferência fornece uma representação completa de um sistema linear no domínio da frequência e uma representação de fácil manipulação e análise de sistemas de controle lineares e complexos. Esse método de representação também permite expressar as mudanças em um sistema por causa do erro de modelagem, o que é essencial quando se considera a sensibilidade às variações do processo (ÅSTRÖM, 2008). A função de transferência utilizada para descrever o comportamento de um sistema, desempenhou um papel muito importante na área de comunicação e no desenvolvimento da teoria do controle na década de 1930. Elas ainda são muito importantes e úteis nos dias de hoje, pois, diversas técnicas de controle ainda as utilizam (LEVINE, 2011).

Os modelos de sistemas descritos por função de transferência são baseados na transformada de Laplace, e são versáteis o suficiente para representar sistemas lineares com parâmetros constantes. Um sistema com uma única entrada e única saída (*SISO*) pode ser representado por uma única função de transferência, do mesmo modo que um sistema com diversas entradas e diversas saídas (*MIMO*), pode ser representado por um conjunto de funções de transferência. O uso da transformada de Laplace para descrever o comportamento de um sistema dinâmico por função de transferência deve-se ao fato de que nesse método as equações diferenciais se tornam simples equações algébricas. O cálculo com equações

algébricas se torna bem menos complexo, e graças a isso foram desenvolvidos diversos métodos para obter informações sobre sistemas dinâmicos com um esforço computacional muito baixo no século XX. Esta foi a principal razão da popularidade do uso de função de transferência nos métodos de domínio da frequência antes do desenvolvimento do computador digital (SILVA, 2009).

Da mesma maneira, Dorf e Bishop (2011) ditam que a transformada de Laplace substitui a difícil resolução de equações diferenciais por uma menos complexa em equações algébricas. Seguindo algumas etapas, chega-se à solução da resposta no domínio do tempo:

- Obter as equações diferenciais que descreve o sistema;
- Aplicar a transformada de Laplace nas equações diferenciais;
- Solucionar a transformada algebricamente resultante para a variável de interesse;
- Aplicar a transformada inversa de Laplace na resposta da transformada para obter a solução no domínio do tempo.

Segundo Ogata (2010), a transformada de Laplace é um vantajoso método para a resolução de equações diferenciais lineares. Através dela é possível converter as funções comuns trigonométricas, senoidais, exponenciais em funções algébricas de variável complexa s . Se essa equação de variável dependente s for solucionada, basta utilizar da transformada inversa de Laplace para obter a solução da resposta no domínio do tempo. Outras vantagens desse método são que é possível a previsão do desempenho do sistema de forma gráfica sem a necessidade de resolver as equações diferenciais que o descrevem. E que se resolver a equação diferencial tanto a resposta transitória quanto a de regime permanente podem ser obtidas simultaneamente.

Utilizar da ferramenta matemática transformada de Laplace facilita e sistematiza a solução de equações diferenciais de coeficientes constantes. Uma desvantagem ao empregar esse método é que se for utilizado sem o devido conhecimento da teoria real envolvida, pode produzir resultados em desconformidade com o requerido (D'AZZO;HOUPIS, 2003).

Seguindo a mesma ideia apresentada pelos outros autores anteriormente, Tonidandel e Araújo (2012) descrevem a transformada de Laplace como:

A transformada de *Laplace* é amplamente conhecida e utilizada, principalmente nas ciências exatas e engenharias. Encarada como um "ritual de passagem" pelos estudantes de graduação, ela pode ser usada para análise de sistemas lineares invariantes no tempo, tais como circuitos elétricos, osciladores harmônicos, dispositivos ópticos e sistema mecânicos. Nessas aplicações costuma-se interpretá-la como transformações do domínio do tempo para o domínio de frequências. A vantagem mais interessante desta transformação é que as integrações e derivações tornam-se multiplicações e divisões. Ela permite fazer a resolução de equações diferenciais em forma de equações polinomiais, que são muito mais simples de resolver (TONIDANDEL E ARAÚJO, 2012, p. 1).

A transformada de Laplace pode ser definida como (D'AZZO;HOUPIS, 2003):

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \quad (4)$$

E a transformada inversa de Laplace da seguinte maneira:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (5)$$

Em que, $s = \sigma + j\omega$ é uma variável complexa, e L é o operador linear de Laplace.

A função de transferência de um sistema de controle representado por equação diferencial linear invariante no tempo, pode ser definida como a relação entre a transformada de Laplace da função resposta e a transformada de Laplace da função entrada, admitindo todas as condições iniciais nulas (OGATA, 2010). Levando em consideração a equação diferencial de um sistema linear invariante no tempo genérico, temos a seguinte representação matemática:

$$a_{0n} \ddot{y} + a_1 \dot{y} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 \ddot{x} + b_1 \dot{x} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x, \quad n \geq m \quad (6)$$

No qual, y é o sinal de saída e x o sinal de entrada do sistema. Dessa forma, utilizando da transformada de Laplace (Equação 4) nos sinais de entrada quanto no de saída e considerando todas condições iniciais nulas, obtemos a função de transferência $G(s)$ a seguir:

$$G(s) = \frac{L[\text{Saída}]}{L[\text{Entrada}]} = \frac{L\left[b_0 \overset{m}{x} + b_1 \overset{m-1}{x} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x\right]}{L\left[a_0 \overset{n}{y} + a_1 \overset{n-1}{y} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y\right]} \quad (7)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

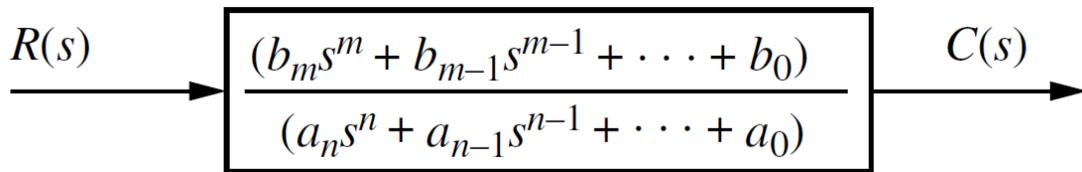
Dessa forma, empregando o conceito da função de transferência, é possível representar a dinâmica de um sistema de controle por intermédio de uma equação algébrica em função de s , de ordem n . O denominador da função de transferência é denominado “*polinômio característico*”, e quando igualado esse polinômio a 0 (zero) a função é a chamada “*equação característica*” (SILVA, 2009; OGATA, 2010).

Alguns comentários sobre a função de transferência devem ser levados em conta, pois esse método só se aplica para sistemas de equações diferenciais lineares invariantes no tempo, sendo portanto bastante utilizado na análise e projeto desses sistemas. Alguns importantes comentários sobre a função de transferência são (MANDAL, 2006; OGATA, 2010):

- A função de transferência de um sistema é um modelo matemático que expressa a relação entre o sinal de saída e o sinal de entrada;
- A função de transferência é uma característica completamente externa do sistema, ou seja, independente da função de entrada;
- A função de transferência tem conteúdo suficiente para relacionar a entrada e a saída do sistema, porém não inclui informações físicas sobre o sistema. Nesse caso, diferentes tipos de sistemas físicos podem ter a mesma função de transferência;
- Se a função de transferência de um sistema for previamente conhecida, é possível testar diferentes tipos de entrada permitindo o entendimento da natureza do sistema;
- Caso a função de transferência de um sistema não for previamente conhecida, é possível determiná-la experimentalmente aplicando diversas entradas conhecidas e estudando o comportamento das respostas do sistema.

Em geral, os sistemas físicos que podem ser descritos por equações diferenciais lineares e invariantes no tempo podem ser modelados através de funções de transferência. A função de transferência de um sistema também pode ser representada por um diagrama de blocos genérico, conforme a Figura 5, com o sinal de entrada à esquerda, a função de transferência no interior do bloco e o sinal de saída à direita (NISE, 2011).

Figura 5 - Diagrama de Blocos Genérico



Fonte: Nise (2011)

A representação de funções de transferência por diagramas de blocos é predominante na engenharia de sistemas de controle, devido à facilidade apresentada pelo método através de diagramas. A definição para um diagrama de blocos, é uma representação gráfica das funções desempenhadas por cada elemento do sistema e do fluxo de sinais entre eles (OGATA, 2010; DORF E BISHOP, 2011).

O método de representação por diagrama de blocos é uma maneira de representar a estrutura e as propriedades de um sistema linear, qualquer que seja a sua complexidade. A etapa inicial de construir um diagrama de blocos, é transformar o sistema de equações assumindo as condições iniciais como nulas. Existem diversas regras de como trabalhar com os blocos e quais operações realizar com eles, mesmo assim, esse método é ainda menos trabalhoso do que realizar operações matemáticas com as próprias equações diferenciais que regem o sistema (LEVINE, 2011).

Um sistema de controle é regularmente composto por diversos componentes e subsistemas. Para o método de representação por diagrama de blocos o comportamento de cada um desses componentes e subsistemas são representados por uma função de transferência individual inseridas dentro dos blocos. As conexões e relação entre esses blocos é demonstrada através de flechas que indicam a direção da da informação ou fluxo do sinal. Esse método possibilita ter uma visão

geral do comportamento do sistema que não seria tão fácil a partir de uma representação matemática puramente abstrata (MANDAL, 2006).

Segundo Ogata (2010), no diagrama de blocos as variáveis do sistemas são interligadas por meio de blocos funcionais (que são as operações matemáticas que o sinal de entrada produz no sinal de saída), e que o fluxo do sinal segue o sentido das setas. Para um sistema existem diversos tipos de representação por diagramas de blocos, portanto, depende do tipo de análise que se quer fazer no sistema. A combinação de funções de transferência e diagrama de blocos é uma ferramenta poderosa na teoria de controle. Pois, mesmo funções de transferência que relacionam diferentes sinais complexos de um sistema, podem ser facilmente resolvidos com simples manipulações da álgebra do diagrama de blocos (ÅSTRÖM, 2008).

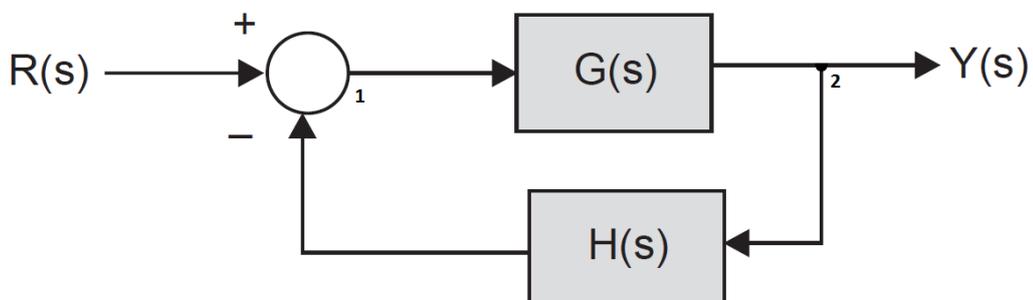
Um modelo de diagrama de blocos para um sistema de malha aberta e um para sistema de malha fechada será apresentada a seguir nas Figuras 6 e 7, respectivamente (MANDAL, 2006):

Figura 6 - Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha aberta



Fonte: Mandal (2006)

Figura 7 - Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada



Fonte: Própria do Autor (2017)

Através da Figura 7, nota-se o somador indicado pelo numeral 1 e o ponto de ramificação indicado pelo numeral 2, propriedades do diagrama de blocos. O somador indica a operação matemática a ser realizada pelos sinais e o ponto de ramificação é o ponto do qual o sinal vem e avança simultaneamente a outros blocos ou somadores (MANDAL, 2006).

2.3.2 Modelagem no Domínio do Tempo

Na teoria de controle moderno, utiliza-se de técnicas no domínio do tempo para modelar as características dinâmicas de um sistema. A abordagem no espaço de estados (habitualmente chamada técnica de controle moderna, ou de domínio no tempo) constitui um método unificado de modelagem, análise e projeto de sistemas não necessariamente lineares dotados de folga e instabilidade. Além disso, esse método leva em consideração condições iniciais não nulas, sistemas variantes no tempo de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*MIMO*) (NISE, 2011).

A modelagem de sistemas dinâmicos na teoria de controle moderno é quase completamente dependente da forma de representação no espaço de estados, pois é possível obter uma solução eficiente com o uso de computadores digitais. Na representação por variável de estado, um sistema de n -ésima ordem é descrito em equações diferenciais de primeira ordem, em oposição a um único modelo de equação diferencial de n -ésima ordem por função de transferência na teoria de controle clássico (MANDAL, 2006).

O projeto de técnicas de controle no espaço de estados é através das variáveis de estado. Esse método de controle consiste em controlar o sistema através de um sinal de controle, $u(t)$, que seja em função das diversas variáveis de estado e da saída medida (DORF e BISHOP, 2011). A teoria do espaço de estados trata de sistemas dinâmicos que retratam a dinâmica interna de um determinado processo físico, como também, a interação desse processo com o mundo exterior. Essa teoria utiliza de matrizes para descrever o comportamento dos sistemas de controle. Tornando mais simples a descrição da equação diferencial que rege o comportamento do sistema dinâmico (FIROOZIAN, 2009).

A tendência dos sistemas de controle são de aumentar a complexidade devido à necessidade dos sistemas requeridos hoje em dia de realizar tarefas que exigem alta precisão. Devido a essa necessidade, a teoria de controle moderno tem

sido desenvolvida desde os meados de 1960. Essa teoria é baseada na concepção de estado, e alguns conceitos se forem conhecidos torna menos difícil o entendimento dessa teoria (OGATA, 2010):

- **Estado:** O estado de um sistema é uma estrutura matemática que contém n variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ denominadas variáveis de estado, tais que, as condições iniciais $x_i(t_0)$ e as entradas $u_j(t_0)$ são suficientes para descrever especificamente a resposta futura do sistema (D'AZZO; HOUPIS, 2003);
- **Variáveis de Estado:** As variáveis de estado de um sistema dinâmico são aquelas que compõem o menor conjunto de variáveis capazes de determinar o estado de um sistema. Essas variáveis não necessitam ser fisicamente mensuráveis ou observáveis, mas na prática, para um sistema de controle ótimo é requerido que todas as variáveis de estado sejam facilmente mensuráveis (OGATA, 2010);
- **Vetor de Estados:** Vetor composto pelas n variáveis de estados que descrevem o comportamento de um sistema (GOPAL, 2003);
- **Equações de Estados:** Um conjunto de equações diferenciais simultâneas de primeira ordem com n variáveis de estados (NISE, 2011);
- **Espaço de Estados:** É definido como o espaço n -dimensional em que os componentes do vetor de estado representam seus eixos de coordenadas. Sendo possível qualquer estado ser representado por um ponto no espaço de estados (TEWARI, 2002);
- **Trajétoria dos Estados:** É definida como o percurso gerado no espaço de estados pelo vetor de estado $x(t)$, conforme ele muda no tempo. Para o caso bidimensional, o espaço e a trajetória do estado são o plano e a trajetória de fase, respectivamente (D'AZZO; HOUPIS, 2003).

A abordagem do domínio do tempo também pode ser usada para sistemas modelados pelo domínio da frequência. Essa alternativa permite o projetista de sistemas de controle outra perspectiva para o sistema que se quer controlar. Embora as técnicas de controle no espaço de estados possam ser aplicada em uma diversidade de sistemas, não são tão intuitivas quanto a abordagem no domínio da frequência (NISE, 2011).

Na representação por espaço de estados, as equações de estados são sempre de primeira ordem independentemente da ordem do sistema ou do número de entradas e saídas. Isso gera uma enorme vantagem para os métodos de espaço do estado, pois não distinguem formalmente os sistemas de entrada e saída únicas dos sistemas multivariáveis. Permitindo uma análise e controle eficientes de sistemas multivariáveis com a mesma facilidade que para sistemas de variáveis únicas (TEWARI, 2002).

A análise em espaço de estados envolve três variáveis, a de entrada, a de saída e a de estados. A representação de um sistema no espaço de estados não é única, mas o número de variáveis de estado é o mesmo para qualquer tipo de representação. Para sistemas controlados pelo espaço de estado, o sistema deve conter elementos que memorizem o valor de entrada para $t > t_1$. Nesse caso, são utilizados integradores que servem como dispositivos de memória, e o sinal de saída deles podem ser escolhidos como variáveis de estado. O número de variáveis de estado necessárias para representar por completo o comportamento de um sistema dinâmico é igual ao número de integradores que compõem o sistema (OGATA, 2010).

Uma explicação mais sintetizada sobre a modelagem por espaço de estados é dada por Silva (2009), em que a palavra "estado" refere-se à condição dinâmica de um sistema, e é um vetor que traça uma trajetória no espaço-estado. Uma descrição completa do estado exige todas as variáveis relacionadas à evolução temporal da resposta desse sistema. O espaço de estados é associado com a definição de que um sistema de segunda ordem requer um espaço bidimensional, um sistema de terceira ordem requer um espaço tridimensional e assim por diante.

Segundo Ogata (2010), define-se a equação no espaço de estado seguindo algumas etapas. Supondo um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas com n integradores, r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$, m saídas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ e as n saídas dos integradores como variáveis de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Então, o sistema é representado pela equação a seguir:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)
\end{aligned} \tag{8}$$

E as saídas do sistemas, são descritas matematicamente por:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\
y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\
&\vdots \\
y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)
\end{aligned} \tag{9}$$

Na forma matricial descreve-se as Equações 8 e 9 nas equações a seguir:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dessa forma, encontra-se:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{12}$$

$$y(t) = g(x, u, t) \tag{13}$$

No qual, a Equação 12 é a equação de estado e a Equação 13 é a equação de saída. E caso as funções vetoriais f e g envolverem explicitamente o tempo t , então o sistema é dito variante no tempo. Linearizando as Equações 12 e 13 em

torno de um ponto de operação, têm-se as seguintes equações linearizadas (OGATA, 2010):

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (14)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (15)$$

Onde, $A(t)$ é a matriz de estado, $B(t)$ é a matriz de entrada, $C(t)$ é a matriz de saída e $D(t)$ a matriz de transmissão direta.

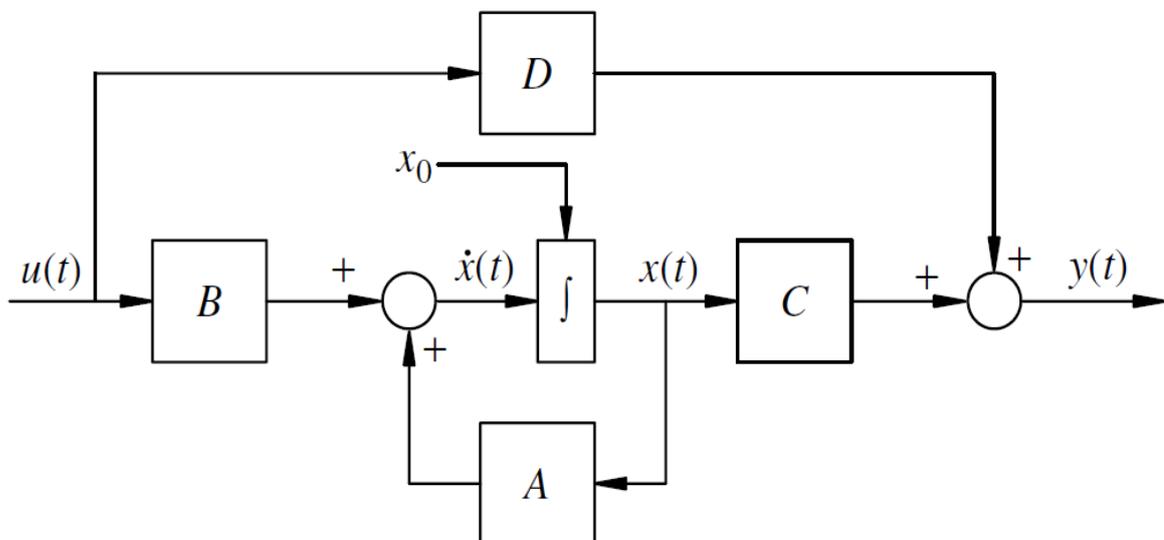
Se as funções vetoriais f e g não envolverem o tempo t explicitamente, então o sistema é do tipo invariante no tempo e as equações 14 e 15 podem ser simplificadas nas equações a seguir (WILLIAMS II e LAWRENCE, 2007):

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (16)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (17)$$

Assim, a Equação 16 é a equação de estado para um sistema linear invariante no tempo (LTI), e a Equação 17 é a equação de saída para esse mesmo sistema. A Figura 8 a seguir, descreve as Equações 16 e 17 por diagrama de blocos:

Figura 8 – Representação por diagrama de blocos de um sistema modelado por espaço de estados



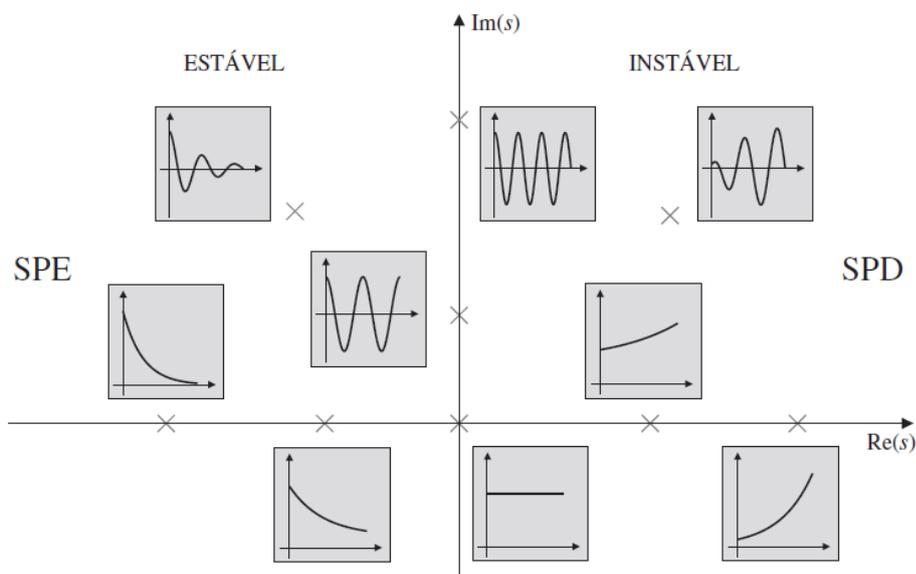
2.4 TÉCNICAS DE CONTROLE E ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DE CONTROLE

Para esse trabalho, a análise do desempenho dos sistemas de controle desenvolvidos serão por meio de técnicas dos domínios da frequência e tempo. Para o sistema regulador modelado por função de transferência e diagrama de blocos, as análises de desempenho e estabilidade serão feitas pelo Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz. Para o servossistema modelado por espaço de estados, o método de alocação de polos adotado garante a estabilidade do sistema com a alocação dos polos e a matriz de ganho K adequadas, para sistemas de estado completamente controlável. Para encontrar a matriz de ganho K , nesse trabalho, será utilizado o método de substituição direta. Um critério que também será adotado, que funciona para ambos domínios do tempo e da frequência, é o efeito da localização dos polos nos sistemas de controle.

2.4.1 Estabilidade de sistemas de controle: Efeitos da localização dos polos

A análise do desempenho e estabilidade de um sistema de controle, é possível de ser feita pela simples investigação sobre a localização dos polos da equação característica do sistema. Dependendo da localização dos polos, o sistema apresenta um diferenciado tipo de resposta. Conforme os seguintes tópicos e da Figura 9, define-se (TEWARI, 2002; NISE, 2011; FRANKLIN *et al*, 2013):

Figura 9 - Estabilidade em relação à localização dos polos



Fonte: Franklin et al (2013)

- Se a parte real de todos os polos são negativas o sistema é dito assintoticamente estável;
- Se qualquer polo possui uma parte real positiva o sistema é declarado instável;
- Se todos os polos do sistema possuírem parte reais menores ou iguais a zero o sistema é chamado estável, mas, não assintoticamente estável.

2.4.2 Método de Alocação de Polos

Para Gopal (2003), o projeto de sistemas de controle no domínio do tempo pode ser feito pelo método de alocação de polos. De certa maneira, esse método é similar ao método do Lugar das Raízes, desenvolvido por W. R. Evans, que aloca os polos dominantes de malha fechada nas posições pretendidas. A diferença é que no método de alocação de polos, alocamos todos os polos de malha fechada na posição desejada. No método de alocação de polos, o objetivo é alocar os polos (mais especificamente os autovalores) do sistema de modo que o sistema se comporte da maneira desejada (em relação à estabilidade, velocidade de resposta, entre outros critérios) (SILVA, 2009).

Para aplicação do método de alocação de polos é necessário que todas as variáveis de estado do sistema sejam medidas com êxito e que estejam acessíveis para retroação, ou seja, é requerido que o sistema seja completamente controlável para que os polos de malha fechada possam ser alocados em qualquer posição desejada por meio de uma realimentação de estado, aplicando uma matriz de ganho adequada (DORF e BISHOP, 2011; NISE, 2011). Considerando um sistema de controle linear e invariante no tempo, com todas variáveis disponíveis para realimentação, representado no espaço de estados pela seguinte equação (PARASKEVOPOULOS, 2002; OGATA, 2010):

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (18)$$

No qual,

- x = vetor de estado (vetor n)
- y = sinal de saída (Escalar)
- u = sinal de entrada (Escalar)
- A = matriz constante $n \times n$

- $B =$ matriz constante $n \times 1$

Um dos métodos para verificar se o sistema é de estado totalmente controlável é realizar uma análise através da matriz de controlabilidade M conforme a equação (TEWARI, 2002; OGATA, 2010; DORF e BISHOP, 2011):

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (19)$$

O sistema será de estado completamente controlável, caso essa matriz seja Não-Singular. Ou seja, todos n vetores colunas devem ser linearmente independentes. Se isso for atendido, o posto da matriz M será n e o determinante da matriz M deve ser diferente de zero (GOPAL, 2003; OGATA, 2010).

Aplicando um sinal de controle linear com realimentação de estados u (Equação 20) na equação de Estados (Equação 18). Então, o sistema de malha fechada é dado pela equação homogênea (Equação 21):

$$u = -Kx \quad (20)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x(t) \quad (21)$$

Isso quer dizer que o sinal de controle u é definido por um estado instantâneo, e esse esquema é determinado realimentação de estado. A matriz K de posto $1 \times n$ é a matriz de ganho de realimentação de estado. O objetivo de controle para esse caso é encontrar a matriz K tal que se possa alocar os polos de malha fechada do sistema na posição desejada (GOPAL, 2003; OGATA, 2010).

A solução para a equação 21 é dada por:

$$x(t) = e^{(A-BK)t} x(0) \quad (22)$$

Onde $x(0)$ é o estado inicial gerado por um distúrbio externo. Os autovalores da matriz $(A - BK)$ determina a estabilidade e a característica temporal do sistema, sendo que, se essa matriz for escolhida corretamente poderá ser assintoticamente estável. Sendo assim, poderá fazer $x(t)$ tender a zero, para todo o valor de $x(0) > 0$ e t tendendo ao infinito (SILVA, 2009; OGATA, 2010).

Basicamente, esse método consiste em modificar os polos originais do sistema através da realimentação das variáveis de estados. O sistema fica controlado após aplicar um ganho K , de modo que após a realimentação os polos se tornem as saídas do sistema. A matriz de realimentação K pode ser obtida por três maneiras: o Método de Substituição Direta, o Método da Transformação da Matriz T ou pela Fórmula de Ackermann (GOPAL, 2003; JAGAN, 2008; OGATA, 2010).

Para exemplificação do método que será utilizado nesse trabalho, considere-se o sistema de controle (Equação 18), o sinal de controle (Equação 20) e a equação homogênea (Equação 21).

O método adotado nesse trabalho para encontrar a matriz de ganho K será o método de substituição direta. Para aplicação desse método, considera-se o exemplo a seguir adotando $n = 3$ a matriz de ganho K de realimentação é:

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \quad (23)$$

Substituindo a matriz K no polinômio característico:

$$|sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) \quad (24)$$

Nota-se que ambos os lados da Equação 24 são dependentes da variável s . Sendo assim é possível determinar os valores de k_1 , k_2 e k_3 igualando os polinômios. Esse método é conveniente quando $n \leq 3$, para valores maiores esse método se torna bastante trabalhoso (WILLIAMS II e LAWRENCE, 2007; OGATA, 2010).

2.4.3 Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

O critério de Routh-Hurwitz indica se existem ou não raízes instáveis em uma equação polinomial, no caso dos sistemas de controle, na equação característica. Esse método de estabilidade apresenta a vantagem de dispensar o cálculo explícito dos polos do sistema de malha fechada. Usando este método podemos dizer quantos polos do sistema de malha fechada estão no SPDC (Semiplano Direito Complexo), SPEC (Semiplano Esquerdo Complexo) ou sobre o eixo imaginário. Portanto, esse critério estabelece quantos, mas não onde os polos estão

localizados. Esse método é bastante utilizado ainda nos dias de hoje, devido à possibilidade de trabalho com equações simbólicas (não numéricas) (DORF e BISHOP, 2011; NISE, 2011; FRANKLIN *et al*, 2013).

Considerando a função de transferência, genérica, da equação a seguir:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (25)$$

a equação característica é:

$$a(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (26)$$

Segundo Franklin *et al* (2013), algumas afirmações, baseada na condição abaixo, sobre a estabilidade do sistema podem ser feitas sem calcular as raízes do polinômio.

- **Condição:** Uma condição necessária, considerando a equação característica do sistema (Equação 26), para a estabilidade do sistema é de que todas as raízes tenham parte reais negativas, ou seja, que todos os coeficientes a_i sejam positivos. De outro ponto de vista, Dorf e Bishop (2011) afirmam que se todos as raízes estiverem no semiplano esquerdo complexo, todos os coeficientes devem ter o mesmo sinal. Isso implica que, se algum dos coeficientes for nulo (não existir) ou for negativo, então o sistema terá polos fora do Semiplano Esquerdo Complexo (SPEC), logo, instável.

Essa condição é necessária, porém, não é suficiente para garantir que o sistema seja estável. Caso essa condição não for satisfeita, o sistema é de característica instável e não é necessário continuar com a análise. Todavia, se a condição for atendida segue-se o método com as próximas etapas. Inicialmente esse método era desenvolvido em termos de determinantes, porém, atualmente existe a formulação de um arranjo em forma de tabela que o torna menos trabalhoso. A condição necessária e suficiente para garantir a estabilidade do sistema é de que, analisando o arranjo da equação 27, todos os coeficientes da coluna "1" da matriz tenham sinais positivos (DORF e BISHOP, 2011; NISE, 2011; FRANKLIN *et al*, 2013).

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & & & \\
 s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
 s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
 s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
 s^1 & f_1 & & & & \\
 s^0 & g_1 & & & &
 \end{array} \tag{27}$$

No qual, deve-se realizar o cálculo para encontrar os coeficientes desconhecidos. Esse cálculo funciona de modo padrão, para todos os coeficientes, como uma multiplicação cruzada e divisão pelo primeiro elemento, conforme definido (OGATA, 2010; DORF e BISHOP, 2011; NISE, 2011; FRANKLIN *et al*, 2013):

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \quad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \dots$$

Esse processo, continua até que a última linha seja completada. Essa matriz na forma completa é triangular. O critério de Routh-Hurwitz afirma que o número de raízes com parte real positiva é igual ao número de mudanças no sinal da coluna “1” da tabela. Esse critério requer que não haja troca de sinais na primeira coluna, ou seja, todos os coeficientes mantenham os sinais positivos para que o sistema seja estável. No entanto, caso ocorra mudanças nos sinais (nem todos elementos são positivos), o número de raízes no semiplano direito complexo é determinado pela quantidade de mudanças que ocorrem (MANDAL, 2006; DORF e BISHOP, 2011; NISE, 2011; FRANKLIN *et al*, 2013).

Por exemplo, considerando a seguinte equação como a equação característica de um sistema, verificaremos sua estabilidade:

$$3s^3 + 5s^2 + 2s + 4 = 0 \tag{28}$$

Arranjando essa equação pelo critério de Routh-Hurwitz, tem-se:

$$\begin{array}{l|ll}
 s^3 & 3 & 2 \\
 s^2 & 5 & 4 \\
 s^1 & \frac{(5 \cdot 2) - (3 \cdot 4)}{5} = -\frac{2}{5} & 0 \\
 s^0 & \frac{\left(-\frac{2}{5} \cdot 4\right) - (5 \cdot 0)}{-\frac{2}{5}} = 4 &
 \end{array} \quad (29)$$

Nesse caso, os elementos da primeira coluna são :

$$\begin{aligned}
 s^3 &= 3 \\
 s^2 &= 5 \\
 s^1 &= -\frac{2}{5} \\
 s^0 &= 4
 \end{aligned} \quad (30)$$

Realizando a análise nessa coluna, observa-se que nem todos os coeficientes são positivos. Dessa forma, houve a mudança de sinais duas vezes. A primeira mudança foi do valor positivo (+5) para o valor negativo $(-\frac{2}{5})$ e a segunda foi do valor negativo $(-\frac{2}{5})$ para o valor positivo (+4). Isso implica que há dois polos do sistema no semiplano direito complexo, logo, o sistema é instável.

Quando os coeficientes da primeira coluna não são nulos, utiliza-se os passos apresentados acima. Porém, existem os chamados casos especiais no qual é necessário uma abordagem diferente (OGATA, 2010; DORF e BISHOP, 2011; NISE, 2011).

O primeiro caso especial é quando apenas o primeiro elemento em uma das linhas é zero. Segundo Nise (2011) se o primeiro elemento de uma linha for zero, a divisão por zero, que seria necessária para formar a próxima linha, não é possível de ser feita. Para evitar esse fenômeno uma constante de valor pequeno e positivo, $\varepsilon > 0$, é atribuída para substituir o zero na primeira coluna. Após encontrar os coeficientes, analisa-se a estabilidade tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Por exemplo, considera-se a equação (OGATA, 2010):

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0 \quad (31)$$

A matriz dos coeficientes é:

$$\begin{array}{l|ll}
 s^3 & 1 & 1 \\
 s^2 & 2 & 2 \\
 s^1 & \frac{(2 \cdot 1) - (1 \cdot 2)}{2} = -\frac{0}{2} \approx \varepsilon & 0 \\
 s^0 & \frac{(\varepsilon \cdot 2) - (2 \cdot 0)}{\varepsilon} = 2 &
 \end{array} \quad (32)$$

Se os sinais acima e abaixo da constante ε são idênticos, isso significa que esse sistema possui um par de raízes imaginárias (OGATA, 2010).

O segundo caso especial é quando todos os coeficientes de uma linha calculada forem iguais a zero. Isso implica que a equação característica possui um par de raízes complexas conjugadas ou duas raízes reais de igual valor e sinais opostos. Para resolver esse problema, utiliza-se um polinômio auxiliar no lugar da linha de zeros. O polinômio auxiliar é a derivada de primeira ordem do polinômio da linha que precede a linha de zeros (DORF e BISHOP, 2011; NISE, 2011; FRANKLIN *et al*, 2013).

Por exemplo, considera-se a equação a seguir (FRANKLIN *et al*, 2013):

$$s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12 = 0 \quad (33)$$

A matriz dos coeficientes é:

$$\begin{array}{l|lll}
 s^5 & 1 & 11 & 28 \\
 s^4 & 5 & 23 & 12 \\
 s^3 & 6,4 & 25,6 & 0 \\
 s^2 & 3 & 12 & \\
 s^1 & 0 & 0 & \\
 \text{Novo[]}s^1 & 6 & 0 & \\
 s^0 & 12 & &
 \end{array} \quad (34)$$

Para encontrar o polinômio auxiliar, conforme já apresentado na Equação 34, aplica-se a derivada na Equação 35 encontrando o novo polinômio (Equação 36):

$$a(s) = 3s^2 + 12 \quad (35)$$

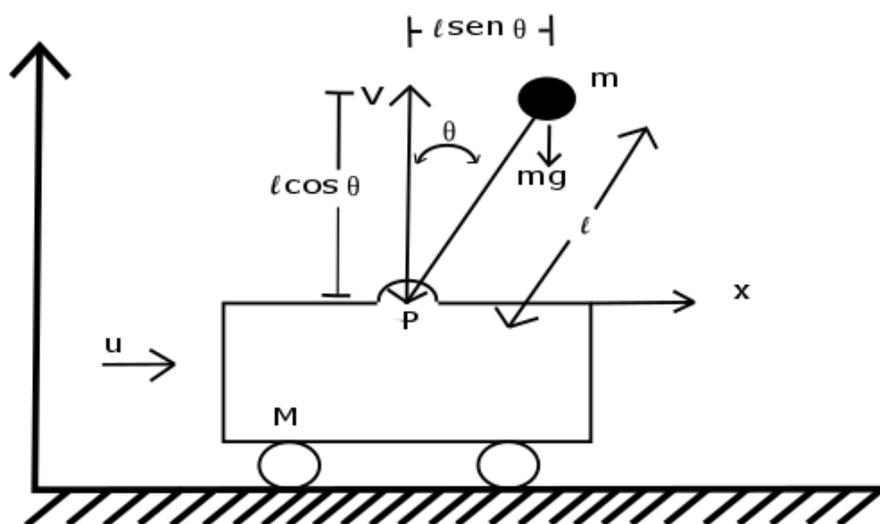
$$\frac{da(s)}{ds} = 6s \quad (36)$$

Como na primeira coluna não houve mudança de sinal, pode-se concluir que todas as raízes desse sistema possui parte real negativa, exceto, pelo par conjugado no eixo imaginário com parte real nula (FRANKLIN *et al*, 2013).

2.5 PÊNDBULO INVERTIDO SOBRE CARRO

O sistema físico do pêndulo invertido sobre carro pode ser representado num plano bidimensional por uma haste acoplada a uma base (Figura 10), nesse caso o carro. Cabe ressaltar, que o movimento desse sistema fica restrito apenas ao plano da página. A haste do pêndulo é propensa a cair para a esquerda ou direita a qualquer momento, caso não seja aplicada uma força de controle no sistema. Uma situação prática que ilustra o problema do pêndulo invertido, é a simples brincadeira de tentar equilibrar uma vassoura ou lápis na palma da mão, que para não deixá-los cair é necessário movimentar a mão de um lado para o outro criando uma força de controle que se opõe à instabilidade da haste (DORF e BISHOP, 2011; OGATA, 2010).

Figura 10 - Sistema do pêndulo invertido sobre carro



Fonte: Autoria própria (2017)

Ribeiro (2007), dita os mesmos conceitos sobre o pêndulo invertido de um seguinte ponto de vista:

Um pêndulo invertido típico é um dispositivo físico que se consiste de uma barra cilíndrica, usualmente metálica, a qual é livre para movimentar em torno de um ponto fixo. Esse ponto é montado em um carro que por sua vez é livre para mover na direção horizontal. O carro é acionado por um motor que pode exercer uma força variável no deslocamento do mesmo. A haste naturalmente tende a cair, pois sua posição vertical é uma condição de equilíbrio instável. Usa-se uma malha de controle com o objetivo de estabilizar a haste do pêndulo na posição vertical. Isso é possível exercendo-se uma força através do movimento do carro que tende a contrabalançar a dinâmica natural do pêndulo. A intensidade da força pode ser controlada a partir da informação da posição angular da haste (RIBEIRO, 2007, p. 16).

O intuito do sistema de controle para o pêndulo invertido é manter a haste na posição vertical. No qual a sua ponta livre seja voltada para cima e a base movimentada com a devida força de controle para compensar o movimento instável da haste, ou, caso o sistema sofra uma perturbação externa (ERNESTO, 2015).

O valor teórico do sistema pêndulo invertido vem do fato desse ser um sistema não linear, relativamente complexo e de comportamento instável em malha aberta. O sistema pode ser descrito por equações diferenciais, tornado possível linearizá-lo em torno de um ponto de equilíbrio. Os vários tipos de modelagem e simulação de técnicas de controle que esse sistema permite o torna um importante objeto de estudo na área de controle. Além dessas características, o que torna o estudo do pêndulo invertido ainda mais interessante são as inúmeras aplicações práticas (KAFETZIS e MOYSIS, 2017).

Segundo Vendramini e Silva (2010), o problema do pêndulo invertido mesmo representa inúmeras situações práticas que podem ser analisadas pelos mesmos conceitos que envolvem a dinâmica desse sistema. Situações como o veículo de transporte humano – Segway, transporte automático incluindo sua utilização para deficientes físicos, guindastes especiais, lançamento de foguetes, robôs autônomos, entre mais.

2.5.1 Resenha Bibliográfica: Técnicas de controle aplicadas ao sistema do pêndulo invertido

Nas bibliografias da teoria de controle existem diversos sistemas de referência na área de robótica e automação de sistemas, que são frequentemente utilizadas para o ensino e pesquisa de técnicas de controle e modelagem para

satisfazer as necessidades dos sistemas no dia a dia, com determinada precisão e eficiência. Dentre esses diversos sistemas de referência o caso do pêndulo invertido é de grande relevância mesmo contendo características construtivas simples. Esse sistema os pesquisadores têm tentado resolver em todo o mundo durante muitas décadas. Todavia, existem diferentes versões desse sistema que oferecem grandes desafios para o controle dos mesmos como nos casos do pêndulo invertido sobre carro, pêndulo invertido duplo, pêndulo invertido triplo e pêndulo invertido quádruplo (BOUBAKER, 2012). Historicamente, o princípio do sistema do pêndulo invertido foi usado pelos sismólogos no design de um “sismômetro” em 1844 na Grã-Bretanha, pois, o sistema montado em um fio rígido é completamente instável e pode sentir qualquer vibração (KRISHNAN, 2012).

Ainda bem antes dessa época, o interesse pelo comportamento dos pêndulos, mais especificamente, o cálculo dos tempos de oscilação diz respeito à observação feita por Galileu Galilei (1564-1642). A lenda de como Galileu descobriu o isocronismo do pêndulo simples é de origem suspeita, um apócrifo, mas não tira o crédito de como o pêndulo e suas derivações influenciam grandemente até nos dias de hoje. A descoberta científica da propriedade do pêndulo simples foi a primeira dentre inúmeras importantes realizações feita por Galileu. O pêndulo, depois de diversos estudos e experimentos, possibilitou regular o fluxo do tempo e sua primeira aplicação como um dispositivo de temporização foi feita na medicina, para determinar a taxa de pulso de pacientes. Nesse caso, o pêndulo foi empregado para medir o tempo do batimento do pulso, em si, e do tempo em que não se sente o batimento (NEWTON, 2004).

Posteriormente, Christian Huygens e Robert Hooke deram continuidade nos estudos sobre o pêndulo simples para utilização como medidor de tempo (FERNÁNDEZ-CARA;ZUAZUA, 2003). Durante muito tempo o pêndulo foi o instrumento mais confiável para medir o tempo. Porém, devido ao desenvolvimento de técnicas mais precisas como as oscilações atômicas ou eletrônicas ele veio a ser substituído (RIBEIRO, 2007). O pêndulo é um sistema simples, mas seu comportamento pode ser substancialmente complexo, e para uma compreensão detalhada é requerido uma base matemática avançada para prosseguir com as deduções. Felizmente, os resultados das análises são normalmente mais acessíveis para compreensão (POOK, 2011).

Retornando ao caso em especial do pêndulo invertido, existem diversos artigos, teses, trabalhos, livros que modelam, aplicam e simulam técnicas de controle para obter o comportamento do sistema controlado. Seguindo esse contexto, diversas pesquisas de técnicas de controle foram estudadas e desenvolvidas para o sistema do pêndulo invertido desde o período de 1950, com atenção especial para o modelo do pêndulo invertido sobre carro. (BOUBAKER, 2012).

A primeira investigação sobre esse caso foi feita por Roberge (1960). Em sua obra "*THE MECHANICAL SEAL*" é apresentado o desenvolvimento e construção de um servomecanismo para controlar uma vassoura na posição invertida e os compensadores que a técnica necessitou para controlar o sistema. Os resultados alcançados foram de que em operação normal, sem qualquer perturbação externa, a base da vassoura oscilava aproximadamente a 1rad/seg . Conforme simulado e experimentado na prática, concluiu-se que se o sistema não sofresse qualquer perturbação externa ele poderia operar por aproximadamente três horas sem notar qualquer característica de instabilidade.

No final das décadas de 1960, o pêndulo invertido sobre carro foi abordado por autores de livros clássicos na área de controle como Dorf (1967) e Ogata (1970). Desde então, nas diversas edições dos livros, de ambos os autores, o sistema do pêndulo invertido tem feito parte na didática de técnicas de controle (LUNDBERG, 2009). Autores como Schaefer e Cannon (1967), Mori *et al* (1976), Maletinsky *et al* (1981), Meier *et al* (1990) utilizaram o caso do pêndulo invertido para demonstrar o comportamento de um sistema instável em controle linear (ÅSTRÖM e FURUTA, 1996).

Oppenheim (1987) abordou o sistema do pêndulo invertido sobre carro em um curso ministrado de sinais e sistemas como exemplo de sistemas com retroação. O método de controle adotado foi o controle PD regulador em resposta a uma entrada com retroação constante do valor do ângulo, com objetivo de projetar uma aceleração de controle no carro e estabilizar a haste na posição vertical. A técnica utilizada para verificar a estabilidade do sistema foi o Método do Lugar das Raízes. Em malha aberta foi comprovado que o sistema é instável por conter um polo no semiplano complexo positivo. A primeira etapa para tentar estabilizar o sistema foi pela aplicação do controle Proporcional na malha do regulador, a fim de controlar o sistema simplesmente aplicando um ganho proporcional ao ângulo medido. O

resultado dessa aplicação foi de que para um ganho negativo o polo no semiplano complexo positivo movia-se mais ainda para a direita, tornando o sistema mais instável que antes. E se o ganho fosse positivo, os polos moviam-se em direção à origem e viajavam pelo eixo complexo tornando o sistema oscilatório. Posteriormente aplicou-se o ganho puramente Derivativo, com objetivo de acelerar o carro mais rápido caso o deslocamento angular crescesse rapidamente. O resultado disso foi que para um ganho negativo o sistema continuava instável, e para um ganho positivo o sistema chegava a ser mais estável, porém, nunca estabilizaria por completo. Por fim, foi implementado em conjunto os ganhos Proporcional e Derivativo na malha do sistema. Os resultados alcançados tanto por meio do método do Lugar das Raízes quanto na prática, foi de que para determinados valores de ganhos o sistema se estabiliza.

Anderson (1989) utilizou de Redes Neurais para aprender a controlar o sistema do pêndulo invertido. Sendo apresentado para a técnica de controle apenas os valores e intervalos das variáveis de estado da planta e que um sinal de falha negativa deve ser maximizado ao longo do tempo. O método de aprendizagem supervisionado não pode ser aplicado a sistemas em que a saída desejada não é conhecida, como nesse caso o do pêndulo invertido. Dessa forma, um método de aprendizado por reforço foi aplicado. Esse método cria duas redes de camadas únicas, uma sendo a rede de ação e outra a rede de avaliação. A rede de ação aprendeu apenas duas saídas, mover o carro para a esquerda ou direita. A rede de avaliação aprendeu o valor esperado pelo método da previsão, descontando valores de futuros sinais. A dificuldade encontrada foi de que o processo de aprendizagem por meio de experiências adquiridas sem retroalimentação ser bastante complexo.

Åström e Furuta (1996) aplicaram estratégias simples para levantar a haste do pêndulo invertido na posição vertical utilizando um método baseado no controle de energia. O sistema foi descrito por uma equação diferencial contendo o ângulo e a variação do ângulo como variáveis. A equação de energia para o sistema do pêndulo invertido foi então descrita em termo do sistema sem controle. Essa estratégia de controle é baseada em não controlar a posição ou velocidade diretamente, e sim controlar a energia do sistema. Dessa maneira, é aplicada ao sistema em repouso a energia correspondente da posição de equilíbrio vertical levantando assim a haste do pêndulo. Os resultados foram de que esse método é uma estratégia convincente de levantar a haste do pêndulo invertido na posição

vertical. Sendo o comportamento do sistema dependente criticamente de uma variável, a aceleração máxima do eixo (pivô). Foram apresentadas as faixas de valores dos desempenhos de sistemas que atendem aos requisitos de projeto.

Drummond, Oliveira e Bauchspiess (1999) apresentaram um trabalho do estudo de controle do sistema do pêndulo invertido utilizando Rede Neural de Base Radial (*RBF*), na prática e em ambientes computacionais como o Matlab® e Simulink®. Nesse caso, a própria rede neural inserida na malha do sistema era o controlador. Os resultados obtidos pelo controle por RBF foi comparado com controlador clássico PI e com o controlador Fuzzy. As conclusões foram de que os controladores RBF e Fuzzy apresentaram desempenho de controle similares, sendo mais robusto do que o controle clássico. Pois, o controlador PI não teve um desempenho tão satisfatório quanto os outros.

Na Universidade Federal Fluminense em Niterói, RJ, Brasil um protótipo do sistema do pêndulo invertido sobre carro foi desenvolvido por Noronha *et al* (2000) como uma atividade de ensino através da didática aprender fazendo. O controle empregado para o sistema foi PID, empregado digitalmente. Os resultados obtidos foram de que em teoria o projeto de controle não delimitava restrições à tensão aplicado sobre o motor, resultando em sobretensão no motor e tempos de resposta extremamente reduzidos. Após esses resultados, buscou-se otimizar o projeto aplicando valores de ganhos mais realistas com o equipamento empregado. Como conclusão final do trabalho, foi dito que o desenvolvimento de um protótipo físico permite aos integrantes ganhar um alicerce teórico e prático de grande valia na teoria de controle.

Oliveira *et al* (2002) modelou e implementou um projeto de controle para o sistema físico do pêndulo invertido sobre carro. O protótipo foi construído pelo conjunto de um carrinho que se movia sobre dois trilhos paralelos, e sobre o carrinho foi acoplado uma haste. O movimento do carrinho foi feito através de um sistemas de polias, comandadas por um motor. A técnica de controle foi por função de transferência e o Lugar das Raízes. Os resultados obtidos no ambiente de simulação Matlab® e Simulink® foram que o controlador na análise linear estabilizou também o sistema não linearizado. A próxima etapa para futuros trabalhos é o desenvolvimento prático de um sensor ótico para monitorar a posição da haste, e assim, simular e validar o sistema de controle para o caso do pêndulo invertido.

Coelho (2005) desenvolveu modelos computacionais no Matlab® para simular o controle postural humano da postura ereta quieta, baseado no sistema do pêndulo invertido. Utilizou-se o controlador PID para implementar um modelo de ativação neural. O resultado alcançado foi a contribuição do trabalho propondo modelar a ativação muscular, por um sinal neural, caracterizando a dinâmica muscular. O controle neural foi simulado por PID sintonizado pelas regras de Ziegler-Nichols apresentando respostas compatíveis com as esperadas.

Muralikrishna *et al* (2005) projetou um controlador PID para aplicação no modelo do pêndulo invertido sobre base móvel. Os testes realizados no trabalho consistiram na formação de diversas combinações de ganhos para aplicar no sistema. Os resultados obtidos foram de que para um determinado valor de ganho o ângulo do pêndulo foi levado a posição de equilíbrio e o valor obtido para a velocidade do carro foi bem próximo de zero. Obtendo assim, um resultado satisfatório.

Morais *et al* (2005) desenvolveram uma técnica de controle nebuloso para o sistema do pêndulo invertido sobre carro. A técnica empregada nesse trabalho foi através do controlador fuzzy, comparando com o trabalho apresentado por Muralikrishna *et al* (2005) que utilizou o controle PID para estabilizar o sistema. Os resultados obtidos foram de que o controlador fuzzy estabiliza o sistema tanto a posição do pêndulo quanto a do móvel de maneira satisfatória. Quando comparado ao controle PID, o controlador fuzzy mostrou ter uma vantagem considerável para controlar o sistema.

Morais, Muralikrishna e Guimarães (2005) projetaram dois controladores para o sistema do pêndulo invertido sobre carro. O primeiro devido à sua simplicidade e robustez, controlador PID e o segundo por proporcionar uma supervisão inteligente baseada em informações qualitativas sobre o sistema, controlador nebuloso. Os resultados obtidos foram de que ambos os controladores levam o sistema à estabilidade. Porém, o controlador nebuloso mostrou-se mais eficiente que o controlador PID.

Gomes *et al* (2005) apresentam as etapas de desenvolvimento de um protótipo didático de um pêndulo translacional pela Universidade Federal do Pará, Brasil. Os resultados obtidos foram de que em ambientes de simulação (Matlab), os acadêmicos são levados ao estudo das técnicas de controle para o sistema como o método de alocação de polos e identificação de modelos lineares contínuos. Na

prática a contribuição foi o próprio protótipo para o ensino de técnicas de controle, bem como, o entendimento da teoria na prática e o incentivo da cultura de construção de equipamentos na instituição de ensino.

Tavares *et al* (2006) desenvolveram o controle de um pêndulo invertido baseado no modelo Fuzzy Takashi-Sugeno. As simulações foram feitas nos ambientes computacionais Matlab® e Simulink®, enquanto que a aplicação prática foi realizada no equipamento IP02 da Quanser®. O controle com lógica fuzzy foi aplicado para possibilitar uma supervisão inteligente, baseada em informações qualitativas sobre o sistema do pêndulo invertido e o projeto do controlador regulador fuzzy foi através de LMIs (Linear Matrix Inequalities). Os resultados de controle obtidos foram satisfatórios conseguindo alocar os polos do sistema à esquerda do semiplano complexo. Como nesse trabalho foi utilizado aproximações lineares para o sistema, o controlador só manteve a estabilidade para pequenos valores de perturbação.

Ferreira *et al* (2006) propuseram uma solução para o problema da defasagem entre teoria e prática de controle, utilizando o sistema do pêndulo invertido sobre carro. A metodologia adotada nesse trabalho foi inicialmente propor aos alunos tentar controlar manualmente o sistema físico do pêndulo invertido existente. Após as difíceis tentativas, foi permitido modelar e simular a dinâmica do sistema. E finalmente aplicar o controle automático, PD, para estabilizar o sistema. Os resultados obtidos foram de vários testes variando as massas do carro ou haste. Posteriormente, aplicando o controle automático PD de duas sintonias diferentes o sistema foi estabilizado e os alunos puderam compreender a importância da modelagem e influência de diferentes sintonizações. As aplicações práticas de combinar as ações de controle computacional com o sistema físico seriam desenvolvidas posteriormente.

Ribeiro (2007) em sua tese de mestrado, apresentou a implementação e construção de um sistema de controle para o caso do pêndulo invertido sobre carro. O objetivo desse trabalho foi de construir um sistema de baixo custo para controlar o pêndulo invertido e testar diferentes técnicas de controle. Para construir o protótipo foram utilizados componentes de uma impressora e computador pessoal. Na parte eletrônica utilizou-se elementos de fácil aquisição. Como plataforma de desenvolvimento de técnicas de controle foi usado um microcomputador pessoal e um software para desenvolver os algoritmos de controle. E para realizar a ligação

entre o computador e a instrumentação eletrônica, utilizou-se uma placa de aquisição de dados de baixo custo. O método de controle empregado no sistema foi o controle PID para a posição do pêndulo, tomando como referência a posição de equilíbrio para comparar o ângulo medido, se ajustar e controlar o sistema. Os resultados obtidos no ambiente de simulação Matlab/Simulink[®] foi de que após implementado o controle PID o sistema apresentou polos no semiplano esquerdo complexo, representando um sistema estável. Na prática, o sistema apresentou um bom desempenho de controle em condições normais, bem como, para leves distúrbios aplicados ao sistema. Ressaltou-se que para melhor desempenho do sistema, controladores adaptativos e de inteligência artificial seriam uma melhor opção.

Rocha e Pellini (2008) desenvolveram um protótipo de Pêndulo Invertido Autocontrolado. Os resultados alcançados foram de que o protótipo ficou dentre 10 a 15 segundos em regime de equilíbrio. O que levou o sistema à instabilidade foi o fato de que a medição do ângulo foi realizada pelo método de integração da velocidade angular. Acarretando em um acúmulo de erro computacional, com o passar do tempo o sistema se desequilibrou. A correção e a melhoria feita no sistema foi através da implementação de um método de medir o ângulo, diferente do método da integração numérica computacional.

Vendramini e Silva (2009) analisaram o sistema do pêndulo invertido como dois subsistemas de únicas entrada e saída. Dessa forma, foram projetados dois controladores PID's. Um para estabilizar a posição do pêndulo e outro para estabilizar a posição linear da plataforma. O método de controle foi desenvolvido de maneira a criar um encadeamento entre os controladores, ou seja, primeiramente controla o pêndulo na posição de equilíbrio e depois desloca o conjunto (plataforma e pêndulo) a partir de uma referência. Os resultados obtidos foi de que na primeira análise as simulações ocorreram de maneira eficiente, e os critérios de projeto estabelecidos foram alcançados. Para uma segunda análise, destaca-se de que como o controle não é robusto o sistema é bastante sensível à variações dos parâmetros da planta.

Diniz *et al* (2009) desenvolveram um trabalho pontuando o crescente uso dos computadores nas diversas áreas de engenharia. Complementando que o Controle e Projeto Auxiliado por Computador (CAD/CAE) maximizar a eficiência do desenvolvimento de produtos. O sistema utilizado foi o do pêndulo invertido e o

método de controle aplicado foi o controlador PID em conjunto com um servossistema multivariável. O controle PID foi utilizado para controlar a haste do pêndulo, e o servossistema para controlar a posição do carrinho. Os resultados obtidos a partir dos dados obtidos pelo CAD e CAE foram similares aos obtidos pelos dados matemáticos. O PID apresentou uma resposta satisfatória para o controle da posição da haste, mas como não consegue controlar a posição do carrinho a atuação do servossistema solucionou esse problema.

Na edição atual do livro didático de controle, Ogata (2010) descreve o sistema do pêndulo invertido sobre carro por equações diferenciais, possibilitando a modelagem por funções de transferência e espaço de estados. Na abordagem por espaço de estados e do método de alocação de polos, o autor projeta um controle servo para controlar a posição do móvel em conjunto com o regulador para controlar a posição do pêndulo. A referência adotada para a posição do móvel é uma função degrau unitário, e um ganho integral é implementado na malha do servo. Os resultados obtidos são de que o sistema se torna estável, ou seja, o pêndulo é estabilizado e o móvel é levado para a posição desejada, em aproximadamente 5 segundos com um sobressinal máximo em torno de 15% para a posição do móvel. Considerando o mesmo sistema de controle modelado anteriormente, o autor utilizou posteriormente o método de controle quadrático ótimo - controle LQR (*Linear Quadratic Regulator*) – para encontrar os valores dos ganhos aplicados ao sistema. Os resultados alcançados foram mais satisfatórios que o anteriormente encontrado por alocação de polos. Pois, o sistema apresentou respostas menos oscilatórias e demonstrou menor valor de sobressinal máximo para a posição do móvel.

Berci e Bottura (2010) desenvolveram um controlador genético para controlar o sistema não linear do pêndulo invertido sem simplificação. Através de uma computação massiva, utilizando uma meta-heurística adequada, o controlador encontra o valor de entrada do sistema com base no sinal de referência, constituindo um controlador não baseado em modelo. Os resultados experimentais obtidos, comparados com os esperados comprovam que o controlador genético aplicado ao caso não linear do pêndulo invertido representa uma importante ferramenta na área de controle por realimentação de estado. Sendo ainda de implementação simples, pois não se faz necessário uma análise mais detalhada do sistema a ser controlado.

Rosa *et al* (2010) desenvolveram uma plataforma para controle de processos físicos em tempo real utilizando o sistema do pêndulo invertido acoplado a uma base

móvel. Diversas ferramentas para elaboração do projeto como Matlab®, Catia®, Proteus®, Tracksmaker®. O objetivo principal do trabalho foi de desenvolver o sistema de controle do pêndulo invertido na prática, por ocasião de não ter muita referência que ditasse esse tipo de trabalho na época. Os resultados de controle obtidos foram que após aplicar a compensação por PID, utilizando amostragem discreta de 50mS para o motor conseguir acompanhar, o sistema apresentou um sobressinal de 10% e tempo de acomodação de 5 segundos aproximadamente.

Vendramini e Silva (2010) utilizaram duas técnicas de controle para o sistema do pêndulo invertido. Inicial foi implementado o controle PID para garantir a estabilidade do pêndulo, e posteriormente foi aplicada a técnica de controle adaptativo MFA (*Model Free Adaptive*) para controlar a plataforma móvel. A técnica MFA tem como restrição que o sistema seja estável em malha aberta, como esse não é o caso da planta do pêndulo invertido utilizou-se o controle PID para garantir isso. Essa técnica é baseada em RNA's e as mesmas não necessitam de um processo de treinamento, pois podem ser inseridas diretamente em um processo de funcionamento. Os resultados obtidos foram de que as estruturas adaptativas de controle se mostraram bastante promissoras, pois o sistema se adapta à diferentes perturbações, entradas e modificações de parâmetros da planta, característica não pertercente ao controle clássico PID.

Koehler, Inaba e Martins (2010) projetaram e implementaram um controlador não linear baseado em lógica fuzzy para o sistema do pêndulo invertido. O objetivo de controle desse trabalho é de levantar e manter a haste do pêndulo na posição vertical mesmo sujeito à distúrbios. O sistema de controle foi implementado utilizando as plataformas computacionais Matlab® e Simulink®, e a comunicação entre a planta física e o computador foi feita pela placa de aquisição de dados da National Instruments®. Os resultados de controle obtidos foram de que a haste é levantada em 8 segundos quando o controlador responsável pelo equilíbrio da haste começa a atuar, e aplicando distúrbios externos o sistema leva menos de 1 segundo para estabilizar novamente. Concluindo então que o controlador implementado na prática obteve um desempenho satisfatório para levantar e controlar a haste do pêndulo invertido, mesmo sob atuação de perturbações externas.

Em uma das últimas edições do livro didático de controle, Dorf e Bishop (2011) descrevem o sistema do pêndulo invertido por equações diferenciais modelando-o por espaço de estados. Como técnica de controle para esse sistema,

foi projetado um sinal de controle para aplicar como retroação das variáveis de estado, considerando apenas a parte instável do sistema. Como o sistema foi reduzido, e o intuito de controle foi apenas de controlar a posição do pêndulo, os resultados obtidos foram que para determinados valores de ganho o sistema se estabiliza rapidamente.

Teixeira, Siqueira e Munaro (2011) apresentaram um trabalho sobre estimação e compensação de atritos no sistema do pêndulo invertido. O método adotado para estimar o atrito foi de utilizar os dados de operação em malha fechada e comparar com os resultados obtidos em malha aberta. Após estimado o atrito, foram utilizados dois métodos de compensação, o de Reforço Constante (CR) e o baseado no modelo de Karnopp. Os resultados obtidos foram de que o compensador CR teve desempenho superior ao compensador baseado no modelo de Karnopp, por agir rapidamente à sinais de erro e ser mais simples. Os resultados foram comparados com modelos reais desenvolvidos.

Mahler e Santos (2011) desenvolveram um trabalho explicando a dinâmica não linear do pêndulo invertido sobre carro. A técnica de controle empregada para estabilizar o sistema foi o controle LQR (*Linear Quadratic Regulator*). Como auxílio nesse trabalho, foi utilizada a ferramenta computacional Matlab®. Os resultados obtidos foram a demonstração do sistema em malha aberta, concluindo, ser de característica instável, e para resolver esse problema utilizou-se o controle LQR. Com o uso desse controlador, o sistema é levado a estabilidade devido a retroalimentação, controlando o movimento oscilatório do pêndulo.

Ribeiro *et al* (2011) projetaram dois controladores discretos com modos deslizantes, um considerando o atraso computacional no sinal de controle e o outro não. A planta utilizada para comparação dos dois controladores foi o pêndulo invertido. O atraso computacional no sinal de controle foi previsto e implementado na prática, pois além de reduzir a estabilidade de um sistema também degrada o seu desempenho. Os resultados obtidos foram de que o controlador que previu o atraso computacional teve um desempenho superior ao que não previu. Pois, atenuou os efeitos de atraso computacional de forma eficiente.

Buzetti *et al* (2012) apresentaram um novo método de controle do pêndulo invertido da Quanser. A técnica de controle empregada foi através do método do Lugar das Raízes, implementando e validando o sistema de controle na prática. Os resultados obtidos foram que inicialmente não foi possível determinar um ganho

puramente proporcional para estabilizar o sistema, sendo assim utilizado um compensador para criar uma variável virtual. Com a inserção desse compensador foi possível, através do método do lugar das raízes, determinar os valores dos ganhos para estabilizar o sistema. Os resultados obtidos na prática foram similares aos de simulação, comprovando a eficácia da técnica empregada.

Vasconcelos *et al* (2012) propuseram um trabalho fazendo um estudo comparativo entre técnicas de controle avançadas. Essas técnicas foram a lógica Fuzzy, Neuro-Fuzzy e o controle PID sintonizado por Algoritmos Genéticos para controlar o sistema do pêndulo invertido. Os resultados obtidos foram de que os controladores inteligentes são ótimas opções para controlar uma planta complexa como o caso do pêndulo invertido. Pois, os controladores Fuzzy e Neuro-Fuzzy realizam o controle do sistema por meio de informações qualitativas e não quantitativas, e o controlador PID sintonizado por Algoritmo Genético por meio de processos adaptativos é levado a encontrar os parâmetros que podem ser ditos ótimos.

Módolo e Guimarães (2012) projetou um sistema de controle inteligente para o sistema do pêndulo invertido sobre carro, com o intuito de simular o controle de atitude de um satélite. O controlador nebuloso foi comparado com os resultados de controle PID com o uso das plataformas computacionais Matlab® e Simulink®. Os resultados obtidos foram de que ambos os controladores conseguem estabilizar o sistema. No entanto, o controlador nebuloso consegue estabilizar a posição do pêndulo percorrendo uma distância menor que o controle PID, bem como, levar a velocidade a zero após equilibrar o pêndulo, característica não visualizada pelo controle PID. Concluindo-se então que a estratégia de controle nebuloso tem maior facilidade para lidar com sistemas não lineares.

Silva *et al* (2012) implementaram na prática um controlador projetado via LMI (*Linear Matrix Inequalities*) no modelo linear do pêndulo invertido da Quanser®. Os resultados alcançados foram de que o controlador projetado atendeu aos requisitos de projeto e alcançou desempenhos satisfatórios. A conclusão sobre os controladores projetados por LMI é de que além de assegurar a estabilidade do sistema, permite alocar os autovalores em uma posição desejada com o intuito de melhorar o comportamento transitório do sistema.

Costa, Lira e Silva (2012) simularam o comportamento dos pêndulos simples e invertido na plataforma computacional Matlab®. O objetivo dos pesquisadores era

de realizar a modelagem, linearização, aplicação de técnicas de controle clássico e comparação dos modelos linearizados e não, para ambos os pêndulos. Mas para esse trabalho, foi apresentado apenas a simulação em malha aberta com auxílio do Matlab® ficando o restante do trabalho para futuras publicações. Os resultados para uma entrada impulso aplicada ao pêndulo simples estabiliza o sistema em torno de 50 segundos, e o pêndulo invertido apresentou um comportamento instável.

Kurderkar e Boukar (2013) apresentaram uma breve visão geral sobre o caso do pêndulo invertido. Nesse trabalho titulado “*Inverted Pendulum Control: A Brief Overview*” foi apresentado os conceitos básicos do sistema do pêndulo invertido sobre carro e duas estratégias de controle aplicadas a ele. A primeira técnica modelada foi com o uso de dois controladores PID. O primeiro controlador projetado, tomando como referência a posição medida do móvel, foi utilizado para controlar a posição do móvel e outro controlador, tomando como referência o ângulo medido, foi aplicado para controlar a posição da haste. A segunda técnica aplicada ao sistema foi através do controlador FLC (*Fuzzy Logic Controller*). Essa técnica utiliza variáveis linguísticas ao invés de numéricas, tornando o controle mais “*humano*”. Os resultados alcançados de ambas as técnicas foi através de simulação pelo software Matlab®. Ambos apresentaram o requisito de controle, manter a haste na posição vertical, Porém o controle PID apresentou-se menos eficiente que o controle FLC devido a uma resposta mais lenta.

Kumar *et al* (2013) modelaram e simularam três técnicas de controle para o sistema do pêndulo invertido sobre carro. Inicialmente descreveram o comportamento do sistema por meio das equações de Euler-Lagrange, e posteriormente aplicaram as técnicas de controle PID através das funções de transferência, SFB e LQR por meio de técnicas no espaço de estados. As simulações das respostas à entrada degrau unitário foram feitas para o controle PID tanto para a posição do carro quanto à posição pêndulo. Ambas as respostas foram satisfatórias alcançando estabilidade. Posteriormente foram simuladas as respostas do método de controle SFB com condições iniciais e em resposta ao degrau unitário. As simulações para o controle LQR foram feitas tomando o ângulo como saída. Os resultados das técnicas de controle SFB e LQR alcançados foram satisfatórios levando o sistema à estabilidade.

Silva *et al* (2013) apresentaram um estudo comparativo entre os controladores Fuzzy e PID aplicados ao sistema do pêndulo invertido utilizando

plataforma Lego Mindstorms NXT®. A metodologia adotada para analisar o desempenho dos controladores foi a consideração de três índices de desempenho. *Su* representando a variação média quadrática da variável manipulada pelo controlador, *ITSE* a integral do erro quadrático em relação ao tempo decorrido de controle e *RBMSEMCE* definido como o erro médio quadrático mais o esforço realizado pelo controlador. Os resultados obtidos foram de que o controlador Fuzzy mostrou-se mais eficiente para controlar o ângulo do pêndulo invertido ao invés do controlador PID. Pois, apresentou menores valores nos índices que medem o erro quadrático médio. A comprovação dos resultados obtidos foram validados na prática implementando os controladores no kit Lego Mindstorms NXT®.

Filho *et al* (2013) projetaram e implementaram na prática um controlador fuzzy para o sistema do pêndulo invertido. Esse trabalho teve como objetivo controlar apenas a posição do pêndulo de maneira a reagir rapidamente diante de perturbações externas. Foram utilizadas as plataformas computacionais Matlab® e Simulink® para desenvolvimento e simulação do desempenho do controlador. Os resultados alcançados foram de que a implementação e testes do controlador aturam conforme o esperado. A posição angular da haste foi controlada diante de diversas perturbações apresentadas ao sistema.

Frutuoso, Santos e Sales (2014) utilizaram de um controlador H₂ Contínuo para estabilizar o sistema do pêndulo invertido sobre uma plataforma linear. O objetivo do controlador é estabilizar o sistema e atenuar o efeito do sinal de perturbação na saída. Para avaliar o desempenho desse controlador foram simulados os resultados nas plataformas Matlab® e Simulink® e comparados com o controlador LQR da Quanser Inc. Nos testes práticos utilizou-se da plataforma de teste IP02 e software QUARC, ambos da Quanser também. Os resultados obtidos foram de que o controlador H₂ Contínuo estabilizou, bem como, proveu um certo grau de robustez à perturbações de baixa intensidade e curta duração ao sistema. Para o caso prático, os observadores de estados apresentaram desempenho satisfatório. Caso contrário, o controlador não estabilizaria o sistema.

Razmjoooy *et al* (2014) compararam duas técnicas de controle no domínio do tempo aplicadas ao sistema do pêndulo invertido. Primeiramente foi modelado o sistema utilizando as equação de euler-lagrange. Posteriormente foram aplicadas as técnicas de controle LQR (Linear Quadratic Regulator) e FSF (Full-State Feedback), esta última através do método de alocação de polos. Por fim, foi aplicado um

compensador para eliminar o erro de estado estacionário. Os resultados obtidos foram de que ambos métodos estabilizam o sistema, porém, o controlador LQR apresentou melhor desempenho mesmo tendo como desvantagem o requisito de selecionar adequadamente as constantes Q e R .

Sultan (2014) apresentou um trabalho comparativo entre as técnicas de controle LQR e Alocação de Polos para estabilizar o sistema do pêndulo invertido sobre carro. O objetivo desse trabalho foi definir qual controlador apresentaria melhor performance para controlar tanto a posição do pêndulo quanto do móvel. O processo de simulação foi feito na plataforma computacional Matlab®. Inicialmente foram apresentadas as duas equações diferenciais que regem o comportamento do sistema, e posteriormente as descreveram em equações vetoriais-matriciais para utilização no espaço de estados. Após simular as respostas de ambos controladores sob entrada degrau unitária, os resultados obtidos foram que os dois métodos de controle estabilizam o sistema com desempenho satisfatório. Porém, o melhor desempenho foi do controlador projetado pelo método de alocação de polos.

Costa *et al* (2014) realizaram simulações em malha aberta e malha fechada para o caso do pêndulo simples e invertido no ambiente computacional Matlab. Os resultados obtidos o pêndulo simples foi de que em malha aberta o sistema se estabilizou em 120 segundos em resposta à entrada impulso, em malha fechada com o uso de controladores PID o sistema é estável em menos de 5 segundos. Para o caso do pêndulo invertido, em malha aberta o sistema apresentou ser completamente instável. Em malha fechada, também com o uso do controlador PID o sistema foi controlado e se tornou estável em menos de 5 segundos.

Chakraborty *et al* (2015) estudaram e apresentaram o comportamento do sistema do pêndulo invertido em relação a diversos parâmetros para o controle PID e compararam com o controle FLC. Alguns parâmetros observados foram o tempo de resposta, erro de estado estacionário, tempo de subida, máximo sobressinal, entre outros. Inicialmente o sistema foi modelado pelas equações de Euler-Lagrange e posteriormente linearizadas em torno do ponto de equilíbrio, ou seja, a posição vertical. As equações diferenciais foram modeladas através da transformada de Laplace por funções de transferência. O processo de simulação dos métodos de controle foi feito nas plataformas Matlab® e Simulink®, e os resultados foram que ambos os sistemas conseguem estabilizar o sistema de maneira satisfatória. Uma

tabela foi apresentada comparando os parâmetros em análise e a conclusão foi de que o controlador FLC obteve melhor desempenho nas respostas do sistema.

Martins e Vieira (2015) aplicaram um controle por modos deslizantes (*SMC - Sliding Mode Control*) ao sistema do pêndulo invertido sobre carro. Este modo de controle é caracterizado por ser uma estratégia muito utilizada no controle robusto, e bastante conhecido por ser insensível à variações paramétricas, incertezas da planta e distúrbios externos. O objetivo do trabalho foi de controlar tanto a posição da haste do pêndulo como a posição do móvel para permanecer numa posição intermediária no curso determinado. Os resultados alcançados foram de que essa estratégia de controle adotada mantém o sistema estável mesmo variando os parâmetros da planta. Além disso, foi verificado que o procedimento desse modelo de projeto é relativamente simples e mesmo aplicando um distúrbio externo grande, o sistema foi capaz de se estabilizar.

Silva, Santos e Andrade (2015) apresentaram a montagem e testes de um pêndulo invertido (Segway) utilizando um Kit Lego Mindstorms Ev3®. O objetivo do trabalho foi de construir e programar o pêndulo invertido para torná-lo didático, utilizando apenas o material de programação e controle PID provido pela própria LEGO®. Os resultados alcançados foram satisfatórios pois foram realizadas as montagens virtual e real do robô segway, programados e realizados os testes para verificação de desempenho. Foi constatado um defeito nos sensores disponibilizados pela LEGO®, no qual, o modelo prático ficou em regime por 15 minutos aproximadamente, sendo recomendado utilizar um diferente sensor para o sistema.

Jose *et al* (2015) estudaram e apresentaram os desempenhos de controle de duas técnicas clássicas para o sistema do pêndulo invertido. O sistema prático utilizado para modelagem foi o modelo da Quanser® Rotary Inverted Pendulum. O sistema foi descrito através das suas relações de energia. Posteriormente, foram aplicadas as técnicas de controle PID e LQR por meio das plataformas computacionais Matlab® e Simulink®. Para o caso do controlador PID, a faixa de ganhos para alcançar a estabilidade é bem pequena. Conforme os ganhos eram aumentados o sistema se acomodava mais rápido e o sobressinal era muito grande, o inverso ocorreu conforme se diminuiu os ganhos. Para o controle LQR o sistema apresentou resultados mais robustos e satisfatórios. Pois, tanto o tempo de acomodação e máximo sobressinal alcançado foram de pequenos valores.

Miranda *et al* (2015) compararam a aplicação de dois controladores ao sistema do pêndulo invertido com a plataforma LEGO Mindstorms®. Um controlador foi desenvolvido por lógica fuzzy e outro pelo método clássico de avanço de fase, permitindo comparar o desempenho dos mesmos e ilustrar o potencial do uso de plataformas para o ensino de controle. Os resultados obtidos pelo controle de avanço de fase foram que nos ambientes de simulação Matlab® e Simulink® o desempenho foi satisfatório, mas na prática o sistema teve erro de regime. Para o controle por lógica fuzzy os resultados foram de que nas simulações o sistema é estável e rejeita o distúrbio por completo, porém, na prática o controlador não elimina o erro de regime permanente e oscila durante o experimento.

Neetha (2016) apresentou o desenvolvimento de técnicas de controle regulador e servo por espaço de estados para o caso do pêndulo invertido rotativo. Inicialmente o sistema foi modelado por equações diferenciais e posteriormente no espaço de estados por equações vetoriais-matriciais. As técnicas de controle aplicadas ao sistema foram as do domínio do tempo, alocação de polos e LQR. O resultado alcançado para o controle regulador, foi que por intermédio da técnica de alocação de polos o sistema foi estabilizado para qualquer variação de cargas. E para o caso do servo, por meio da técnica de controle LQR o sistema conseguiu seguir qualquer referência adotada.

O trabalho apresentado por Resende, Ernesto e Gentilin (2016), foi um estudo comparativo entre as técnicas de controle PID e lógica Fuzzy aplicadas ao caso do pêndulo invertido. Foi utilizado a ferramenta computacional Simulink® para simulação do processo e resultados obtidos. Para o primeiro caso de controle PID, foram utilizados dois controladores individuais que se somavam para finalmente serem aplicados de fato ao sistema. Um controlador foi aplicado para controlar a posição da haste, tendo como set point o ângulo, e outro para controlar a posição do móvel, tendo como set point a posição requerida. Para o controle de lógica Fuzzy, o mesmo é um controle multivariável sendo portanto capaz de controlar ambas as saídas sem influência de outro controlador. Os resultados obtidos foram de que ambos métodos de controle conseguem estabilizar a haste do pêndulo como a posição do móvel. Sendo o controle PID mais eficaz no controle do pêndulo e o controle por lógica fuzzy mais eficaz no controle da posição do móvel.

Arcolezi e Quirino (2017) apresentaram um estudo complementar ao projeto de controle PID no sistema do pêndulo invertido sobre carro. O intuito do trabalho foi

de pesquisar os efeitos da implementação do controle PID servo tomando como referência a posição do móvel por espaço de estados. Os resultados foram comparados com o controle Integral proposto por Ogata (2010). O controlador PI apresentou os mesmos efeitos de resposta transitória, e o controlador PID não foi possível de ser projetado pelo método de alocação de polos por ser de estado não completamente controlável.

Kafetzis e Moysis (2017) apresentaram sobre as inúmeras aplicações do sistema do pêndulo invertido. Inicialmente deduziram as equações governantes do sistema do pêndulo invertido sobre carro por meio das equações de Euler-Lagrange. Após isso, linearizaram o sistema em torno do ponto de equilíbrio do pêndulo na posição vertical e modelaram as equações governantes por espaço de estados. Os processos de simulação foi feito na plataforma Matlab® e a técnica de controle aplicada foi LQR (*Linear Quadratic Regulator*). Como restrição para esse trabalho não era esperado que o carro se movesse muito nas coordenadas x e o pêndulo não oscilasse muito. Portanto, foram escolhidos valores altos de entrada da matriz Q . Os resultados foram que conforme selecionava-se maiores valores de entrada, obtinha-se menores oscilações nas respostas e o sistema retornava ao ponto de equilíbrio mais rápido. Também foram apresentadas diversas variações do sistema do pêndulo invertido e as conclusões foram que esse sistema é uma referência no estudo de técnicas de controle devido às suas inúmeras possibilidades de modelagem e simulações de técnicas.

Arcolezi *et al* (2017) analisaram, deduziram e simularam os efeitos da inserção do ganho proporcional na malha do servossistema tipo 1, modelo apresentado por Ogata (2010) apenas com o ganho Integral, na planta do pêndulo invertido por espaço de estados. O processo de simulação foi feito nas plataformas computacionais Matlab® e Simulink®. Os resultados obtidos foram de que o ganho proporcional não foi benéfico ao sistema de controle. Pois apenas aumentou as amplitudes e não diminuiu o tempo de acomodação das respostas.

3 SISTEMA DE CONTROLE SERVO

Em termos simples, um sistema de controle servo é um sistema com realimentação, ou seja, a variável a ser controlada é realimentada para comparação com a variável desejada. Dessa forma, a desigualdade entre os valores medidos é utilizada para controlar a potência. Também é característica do sistema servo, o fato de não haver variações na carga. Esse sistema é caracterizado por além de ter que compensar os efeitos de uma perturbação externa (característica do sistema regulador), também ter que “seguir” os valores de referência caso haja mudança nela. Devido a esta característica, pode ser encontrado em algumas bibliografias o termo “seguidor” (JAMES, NICHOLS e PHILIPS, 1947; MANDAL, 2006; OGATA, 2010).

Exemplificando o caso desse sistema de controle para o problema proposto nesse trabalho, pretende-se desenvolver um sistema que além de controlar o pêndulo invertido sujeito a perturbações externas (como uma simples batida na haste), também esteja apto para mover o carro para uma posição desejada (referência). Ou seja, em termos práticos o sistema desenvolvido seria capaz de conduzir o carro até um lugar preestabelecido (por exemplo até do outro lado de uma sala) mantendo a haste do pêndulo invertido na posição vertical.

Como o servossistema não permite variações na carga, as massas do sistema serão levadas em conta no processo de modelagem e de controle. Cabe lembrar, que estamos complementando o trabalho de Ogata (2010) que desenvolveu um servossistema do tipo 1 para o problema do pêndulo invertido. Portanto, a metodologia adotada e por efeitos de comparação, os parâmetros de projeto e os critérios de controle adotados para os servossistemas desenvolvidos nesse trabalho, serão idênticos aos propostos pelo autor. Esses parâmetros são $M=2.0 \text{ kg}$, $m=0.1 \text{ kg}$, $l=0,5m$ e $g=9,8m/s^2$. Sendo:

- M = massa do carro;
- m = massa do pêndulo;
- l = comprimento da haste;
- g = aceleração da gravidade.

Os critérios de projeto adotados em relação à aplicação de uma entrada degrau unitário são:

- Tempo de Acomodação t_s : 4 ~ 5 segundos;
- Máximo Sobressinal M_p : 15% ~ 16%.

Logo, os polos para alocação são:

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \mu_3 = -5, \mu_4 = -5, \mu_5 = -5 \quad (37)$$

Adianta-se aqui, que o processo de desenvolvimento dos sistemas de controle podem ser bastante repetitivos. Pois, assume-se que para todos as situações devem ser explicitadas o quanto possível das deduções matemáticas para chegar aos resultados de controle. Portanto, nas situações em que o leitor não sentir a necessidade de passar pelos processos iniciais das deduções de cada caso de controle, pode-se fazer isso sem perda relevante de informação.

3.1 MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA DO PÊNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO

O sistema do pêndulo invertido sobre carro será novamente apresentado (Figura 11), como também, o diagrama de corpo livre desse sistema (Figura 12). Como o sistema servo não permite variações na carga, as equações que regem a dinâmica do sistema levarão em conta as massas do carro e pêndulo.

Figura 11 - Sistema do pêndulo invertido sobre carro

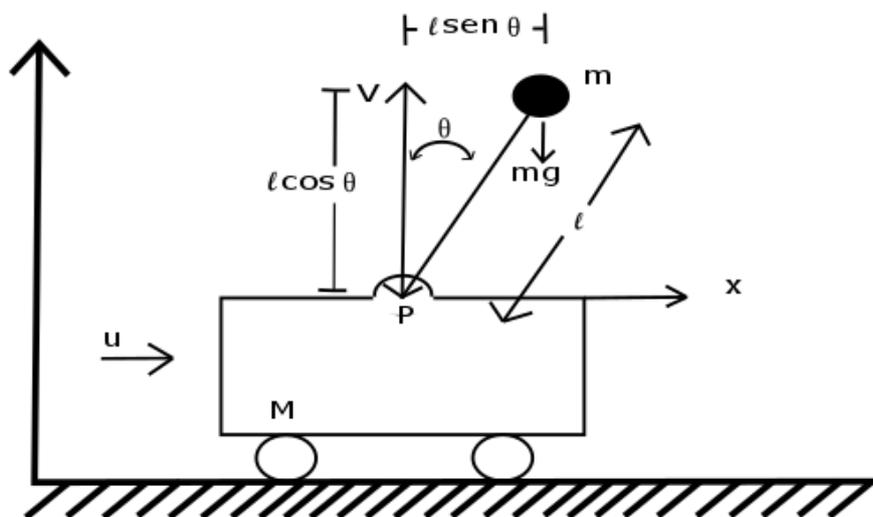
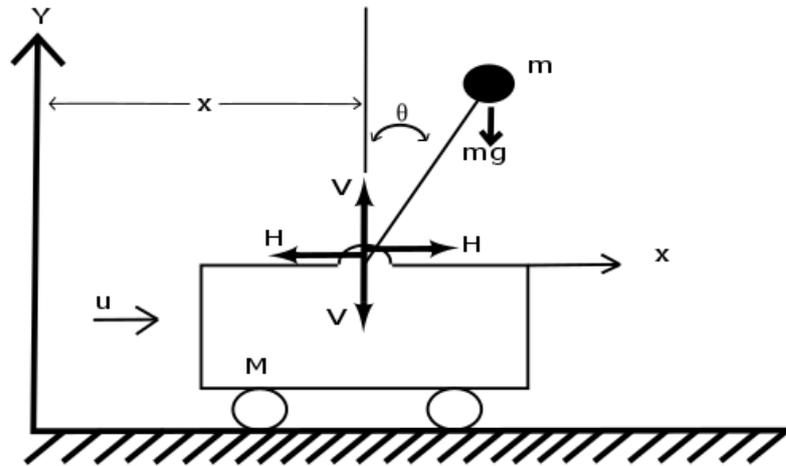


Figura 12 - Diagrama de corpo livre do sistema do pêndulo invertido sobre carro



Fonte: Autoria Própria (2017)

Onde,

- $M \rightarrow$ Massa do carro;
- $m \rightarrow$ Massa da haste;
- $l \rightarrow$ Metade do comprimento da haste;
- $g \rightarrow$ Aceleração da gravidade;
- $u \rightarrow$ força de controle aplicada ao carro;
- $V \rightarrow$ Linha vertical do plano;
- $H \rightarrow$ Linha horizontal do plano.

Segundo Ogata (2010), considerando que o centro de gravidade da haste do pêndulo seja a massa na ponta do pêndulo, o momento de inércia I do pêndulo sobre seu centro de gravidade é pequeno e pode ser desconsiderado. Portanto, é definido o ângulo da haste a partir da linha vertical V como θ , e as coordenadas (x, y) do centro de gravidade da haste como (x_g, y_g) . Dessa forma, a modelagem segue as seguintes etapas:

$$x_g = x + l \sin \theta \quad (38)$$

$$y_g = l \cos \theta \quad (39)$$

O movimento rotacional da haste do pêndulo em torno do seu centro de gravidade é:

$$\ddot{\theta} = V l \sin \theta - H l \cos \theta \quad (40)$$

Os movimentos horizontal e vertical do centro de gravidade da haste do pêndulo são respectivamente:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = H \quad (41)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = V - mg \quad (42)$$

Sendo o movimento horizontal do carro descrito por:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H \quad (43)$$

Para esse problema de controle, o intuito é manter a haste do pêndulo na posição vertical, portanto, admite-se que $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ são grandezas suficientemente pequenas para se fazer $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$, e $\theta \dot{\theta} = 0$. Portanto, linearizando as equações da 40 a 42, obtemos as seguintes equações diferenciais linearizadas para o sistema:

$$\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl \quad (44)$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \quad (45)$$

$$0 = V - mg \quad (46)$$

Assim, com o auxílio das equações 42 e 45, obtém-se:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (47)$$

E com o auxílio das equações 44, 45 e 46, obtém-se as equações:

$$\ddot{\theta} = mgl\theta - Hl = \quad (48)$$

$$\ddot{\theta} = mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}) \quad (49)$$

ou ainda

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (50)$$

Realizando algumas operações matemáticas nas Equações 47 e 50 que são as equações governantes do sistema, chega-se nas Equações 51 e 52. Em

conjunto, ambas descrevem o comportamento do sistema do pêndulo invertido sobre carro (OGATA, 2010).

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \quad (51)$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \quad (52)$$

3.2 TÉCNICAS DE CONTROLE MODELAGEM DO DOMÍNIO DO TEMPO

Uma vez que, as técnicas de controle do domínio do tempo podem ser aplicadas a sistemas SIMO's (*Single Input and Multiple Outputs*), caso do sistema do pêndulo invertido sobre carro, pretende-se além de controlar a posição do móvel manter o pêndulo na posição vertical. O sistema é composto por uma única entrada (força aplicada ao móvel) e as saídas são a posição do pêndulo, a velocidade angular do pêndulo, a posição do móvel e a velocidade do móvel.

Como proposto, esse sistema será modelado por espaço de estados. O passo inicial dessa modelagem é definir as variáveis de estado de acordo com as saídas do sistema. Portanto, as variáveis de estado são:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{\theta} \\ x_3 &= x \\ x_4 &= \dot{x} \end{aligned} \quad (53)$$

A próxima etapa, é encontrar a equação de estado. Como definido na revisão bibliográfica do trabalho, a equação de estado é um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem em função das n variáveis de estado. Para esse caso então ela é representada pelas equações diferenciais de primeira ordem das variáveis de estado definidas. Dessa forma, através das equações que regem o comportamento do sistema do pêndulo invertido (Equações 51 e 52), deve-se encontrar:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \dot{\theta} \\
 \dot{x}_2 &= \ddot{\theta} \\
 \dot{x}_3 &= \dot{x} \\
 \dot{x}_4 &= \ddot{x}
 \end{aligned} \tag{54}$$

Portanto, a equação de estado é composta pelos conjunto dos termos:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = \dot{x}_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{(M+m)g\theta}{Ml} - \frac{1}{Ml}u = \frac{(M+m)g}{Ml}x_1 - \frac{1}{Ml}u \\
 \dot{x}_3 &= \dot{x} = x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{m}{M}g\theta + \frac{1}{M}u = -\frac{m}{M}gx_1 + \frac{1}{M}u
 \end{aligned} \tag{55}$$

Reescrevendo a equação de estado via equações vetoriais-matriciais obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \tag{56}$$

Deve-se considerar a saída do sistema como a posição do carro, para que, o processo de realimentação tente corrigir caso haja diferença ao comparar com a referência. Dessa forma, a equação de saída é:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{57}$$

Aplicando os valores dos parâmetros de projeto $M=2.0 \text{ kg}$, $m=0.1 \text{ kg}$, $l=0,5\text{m}$ e $g=9,8\text{m/s}^2$ nas equações de estado (Equação 56) e saída (Equação 57), obtemos:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{58}$$

$$y = Cx \tag{59}$$

Sendo,

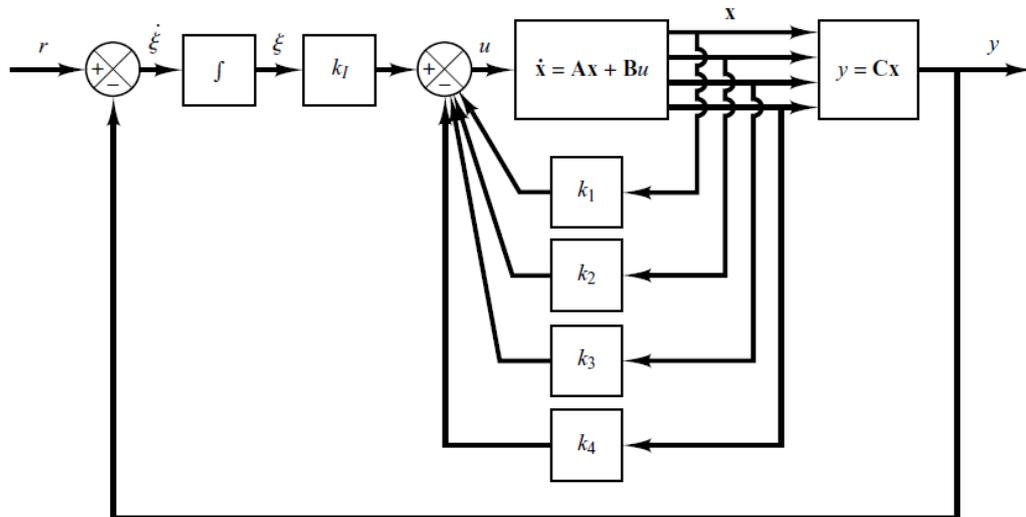
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.610 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

O projeto da técnica de controle, no domínio do tempo, para o servossistema será feito pelo método de alocação de polos. Lembrando que, a restrição para total aplicação desse método, é de que o sistema tem que ser de estado completamente controlável. Isso implica que todas as variáveis de estado do sistema sejam medidas com êxito e estejam disponíveis para retroação. Satisfazendo essa restrição, o método pode ser aplicado e os polos de malha fechada do sistema podem ser alocados nas posições desejadas para satisfazer os critérios de estabilidade, velocidade de resposta, máximo sobressinal, entre outras.

Conforme os objetivos e da metodologia adotada para esse trabalho, serão implementadas as ações de controle PID na malha do sistema servo para as ações P, D, PI, PD e PID. Será levado em conta no desenvolvimento e análise das técnicas empregadas, os resultado e principalmente o procedimento adotado para inserir essas ações no servossistema do tipo 1, que apenas com o integrador (Ganho Integral) já é estável.

Para melhor visualização à respeito dos casos de controle aplicados a partir desse tópico, o servossistema do tipo 1 (Figura 13) desenvolvido e analisado por Ogata (2010) será apresentado aqui, teoricamente, de forma breve. Ressalta-se que a saída do integrador (toda a técnica é baseada na inserção deste) cria uma nova variável de estado ξ . Essa variável de estado é fundamental para a aumentar o vetor de estado e, conseqüentemente, desenvolver o regulador estável para levar o novo vetor de erro, ambos com ordem aumentada, para zero. Ou seja, pretende-se desenvolver um controlador assintoticamente estável que, no regime estacionário, a saída seja igual ao valor de referência.

Figura 13 - Servossistema do tipo 1



Fonte: Ogata (2010)

Para não tornar o texto repetitivo será definido abaixo os parâmetros comuns, nas equações e figuras, à todos os casos em análise.

- \dot{x} = equação de estado;
- x = vetor de estado planta;
- u = sinal de controle;
- y = sinal de saída;
- r = sinal de referência (entrada);
- ξ = sinal de erro;
- K = matriz de ganho K de realimentação de estados;
- A, B, C = matriz constante;
- P = posto da matriz;
- D = determinante da matriz.

Nos resultados de simulação das técnicas de controle empregadas, deve-se atentar para os gráficos e seus significados. No qual o eixo 0 é o estado de equilíbrio do pêndulo invertido e a posição repouso do carro. As variáveis apresentadas nos gráficos das respostas em relação ao tempo são:

- x_1 = posição angular do pêndulo;
- x_2 = velocidade angular do pêndulo;
- x_3 = posição do carro;

- x_4 = velocidade do carro;
- x_5 = variável de estado ξ .

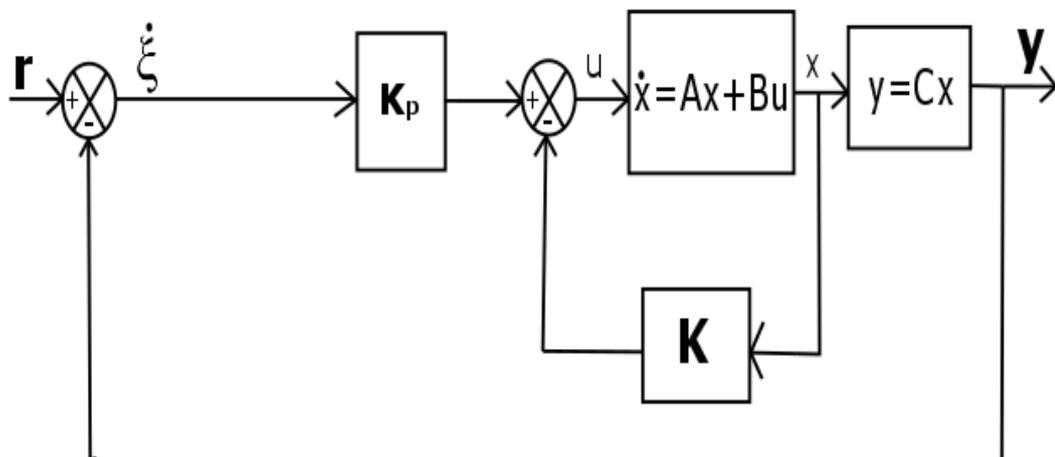
3.2.1 Caso 1: Ação Proporcional (P)

A ideia básica de projetar um servossistema do tipo 1 é desenvolver um sistema regulador estável com ordem aumentada (conforme cria-se mais variáveis de estado) que leve o novo vetor de erro (também com ordem aumentada) para zero, para qualquer condição inicial. O princípio básico de projetar um servossistema do tipo 1 (planta sem integrador) é inserir o integrador entre o ramo direto entre o comparador de erro e a planta. O resultado é que cria-se uma nova variável de estado (saída do integrador) e, devido a isso, o vetor de estado do sistema é aumentado. O resultado apresentado por Ogata (2010) é satisfatório e a estabilidade do sistema é encontrada tanto para a posição do carro quanto do pêndulo invertido.

Como nesse caso o integrador foi retirado da malha do sistema, as variáveis de estado são apenas aquelas definidas durante a modelagem matemática (Equação 53). Portanto, esse sistema não vai ter seu vetor de estado aumentado e, devido a isso, o sinal de controle $u(t)$ será em função das 4 variáveis de estado e da parcela proporcional aplicada ao erro.

O sistema de controle servo com ação Proporcional pode ser apresentado conforme a Figura 14 e o conjunto de equações 60 a 63 que descrevem o comportamento do sistema.

Figura 14 – Diagrama de blocos do sistema servo com Ganho P



$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (60)$$

$$y = Cx \quad (61)$$

$$u = -Kx + K_p \dot{\xi} \quad (62)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx \quad (63)$$

Substituindo o sinal de controle (Equação 62) na equação de estado (Equação 60), chega-se à equação:

$$\dot{x} = Ax + B[-x(K + K_p C) + K_p r] \quad (64)$$

Aplicando a entrada degrau em $t = 0$, a dinâmica do sistema, a partir desse valor de tempo, é descrita conforme a equação:

$$[\dot{x}(t)] = A[x(t)] + B[u(t)] + [0]r(t) \quad (65)$$

Como etapa inicial no desenvolvimento do controlador, deve-se checar a restrição essencial do método de alocação de polos. Pois, para total aplicação desse método, é requerido que o sistema seja de estado completamente controlável. Para assegurar isso, será analisada a matriz de controlabilidade (Equação 19) para esse caso. O sistema será completamente controlável se todos os 4 vetores colunas dessa matriz forem linearmente independentes. Isto implica que o posto da matriz deve ser 4 (quatro) e o determinante da matriz, conseqüentemente, deve ser diferente de zero:

$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

Através da ferramenta computacional Matlab®, o teste do posto (P) e determinante (D) da matriz M (Equação 66) foram que:

$$P = 4$$

$$D = 96.23$$

Portanto, a matriz controlabilidade do sistema é não singular e o sistema é de estado completamente controlável. Dessa forma pode-se continuar com o desenvolvimento da técnica. Seguindo o desenvolvimento de Ogata (2010), pretende-se projetar um sistema assintoticamente estável, ou seja, com erro de estado estacionário nulo a saída em regime estacionário deve ter valor igual à referência degrau adotada. Isso quer dizer que $x(\infty)$ $u(\infty)$ devem ser constantes e $y(\infty) = r$ no regime estacionário. Em regime estacionário o sistema é representado conforme:

$$[\dot{x}(\infty)] = A[x(\infty)] + B[u(\infty)] + [0]r(\infty) \quad (67)$$

Como a entrada degrau é sempre constante para $t > 0$, $r(\infty) = r(t) = r$, subtraindo as equações 65 e 67 temos:

$$[\dot{x}(t) - \dot{x}(\infty)] = A[x(t) - x(\infty)] + B[u(t) - u(\infty)] \quad (68)$$

Dessa forma, define-se:

$$\begin{aligned} x(t) - x(\infty) &= x_e(t) \\ u(t) - u(\infty) &= u_e(t) \end{aligned} \quad (69)$$

A equação 68 pode ser reescrita como:

$$[\dot{x}_e(t)] = A[x_e(t)] + B[u_e(t)] \quad (70)$$

No qual,

$$u_e(t) = -x_e(t)(K + K_p C) + K_p r \quad (71)$$

Como o vetor de estado não teve a ordem aumentada (devido a retirada do integrador) o vetor de erro também não tem sua ordem aumentada. Portanto, é definido conforme a equação:

$$e(t) = [x_e(t)] \quad (72)$$

Dessa forma, pode-se descrever a equação 70 em termos da equação 72 como:

$$\dot{e} = Ae + Bu_e \quad (73)$$

No qual,

$$u_e = -\hat{K}e \quad (74)$$

Sendo a matriz de ganhos \hat{K} para esse caso de controle, também dependente da constante de ganho proporcional, definida na equação a seguir:

$$\hat{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 + K_p \quad k_4] \quad (75)$$

A próxima etapa de projeto é encontrar a matriz \hat{K} de retroação de estado (Equação 75) com a devida alocação de polos. Essa etapa, será pelo método de substituição direta que, resumindo, encontra-se os valores da matriz \hat{K} igualando duas equações características do sistema, conforme:

$$|sI - A + B\hat{K}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) \quad (76)$$

Nesse caso serão utilizados apenas 4 polos, diferentemente do proposto por Ogata (2010) o sistema teve a ordem diminuída. Portanto, serão mantidos o par de polo complexo conjugado e dois reais (ao invés de 3) conforme a seguinte equação:

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \mu_3 = -5, \mu_4 = -5 \quad (77)$$

Resolvendo ambos lados da igualdade da equação 76, e com auxílio da plataforma computacional Matlab®, encontram-se as seguintes equações:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) = s^4 + 12s^3 + 49s^2 + 90s + 100 \quad (78)$$

$$\left| sI - A + B\hat{K} \right| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -k_1 - 20.601 & s - k_2 & -k_3 - k_p & -k_4 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0.5k_1 + 0.4905 & 0.5k_2 & 0.5(k_3 + k_p) & 0.5k_4 + s \end{vmatrix} = \quad (79)$$

$$s^4 + (-k_2 + 0.5k_4)s^3 + [(K_p + k_3)0.5 - k_1 - 20.601]s^2 - (9.81k_4)s - 9.81(K_p + k_3)$$

O próximo passo é compatibilizar os polinômios de ambos lados da Equação 76, através da equação:

$$\begin{pmatrix} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_2 + 0.5k_4 = 12 \\ (k_p + k_3)0.5 - k_1 - 20.601 = 49 \\ -9.81k_4 = 90 \\ -9.81(k_p + k_3) = 100 \end{pmatrix} \quad (80)$$

Assim, encontra-se os seguintes valores para os ganhos:

$$\begin{aligned} k_1 &= -74.6978 \\ k_2 &= -16.5872 \\ k_3 + K_p &= -10.1937 \\ k_4 &= -9.1743 \end{aligned} \quad (81)$$

Conforme visto na equação 81, k_3 e K_p são inversamente proporcionais com um valor máximo definido. Ou seja, quando queremos o resultado do sistema com o máximo valor de K_p o ganho k_3 é nulo, e assim por diante. Esses valores são resultados dependentes dos polos escolhidos para alocação. Dado isso, devemos satisfazer a igualdade definida na Equação 81 para estar em coerência com o método adotado.

Portanto, como a matriz de realimentação de estados de ganho \hat{K} (Equação 75) já foi encontrada, é possível obter a resposta ao degrau para o sistema conforme a equação:

$$\dot{x} = A[x] + Bu + [0]r \quad (82)$$

E, dado que:

$$u = -(K + K_p C)x + K_p r \quad (83)$$

A equação 83 pode ser reescrita conforme:

$$\dot{x} = [A - B(K + K_p C)]x + [BK_p]r \quad (85)$$

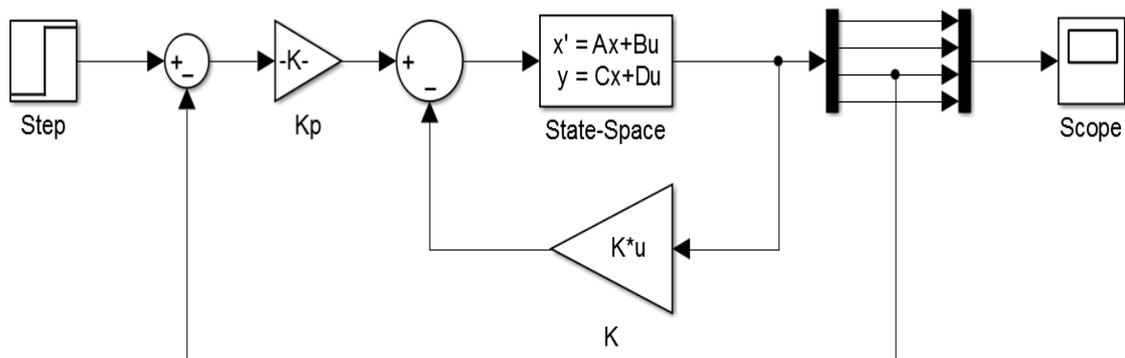
Na equação 85 acima, percebe-se que o sistema servo não perde a sua atuação ao retirar o integrador (e ganho Integral consequentemente), ao analisar-se o último termo da equação (que é dependente da referência).

Ao substituímos os valores das matrizes A, B e C na equação 83, encontra-se a seguinte equação que rege a dinâmica do sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -54.0968 & -16.5872 & k_3 + K_p & -9.1743 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 36.8584 & 8.2936 & -0.5(k_3 + K_p) & 4.5872 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -K_p \\ 0 \\ 0.5K_p \end{bmatrix} r \quad (86)$$

Dessa maneira, para simular o resultado de controle servo apenas com ação Proporcional, deve-se selecionar os valores para k_3 e K_p e utilizar da ferramenta Matlab® para encontrar a resposta ao degrau. Como também, através da plataforma Simulink e de acordo com a Figura 15, pode-se variar os valores dos ganhos k_3 e K_p e obter a resposta ao degrau para o sistema de controle servo por espaço de estados apenas com ganho Proporcional.

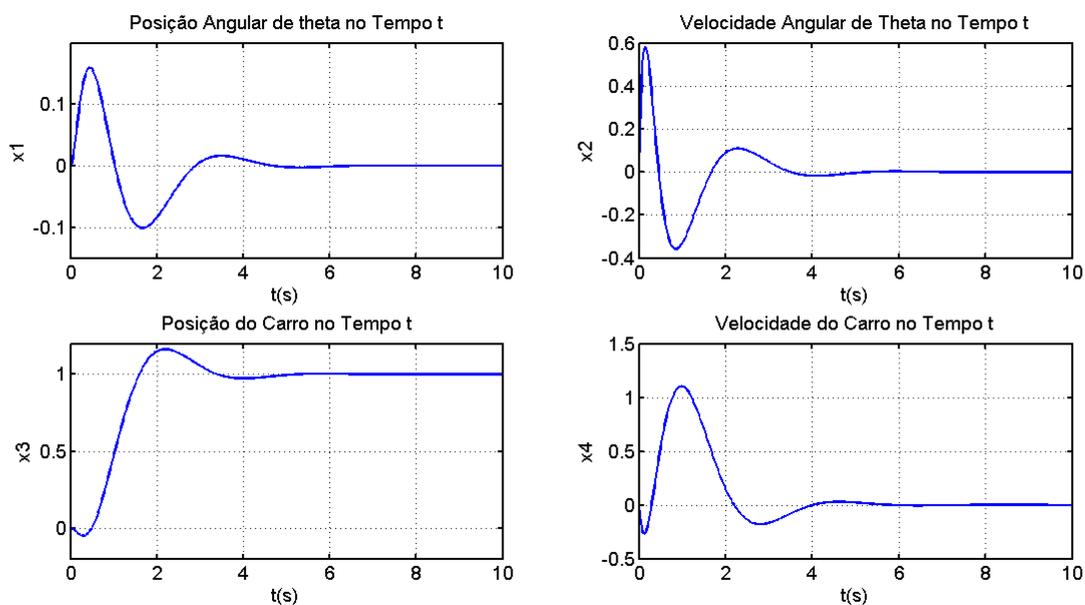
Figura 15 – Esquema no Simulink do Sistema Servo com Ganho P



Portanto, é possível projetar um sistema de controle servo por espaço de estados apenas com ganho Proporcional, e conforme apresentado na Figura 16 o sistema alcança um desempenho satisfatório para os seguintes valores de ganhos:

$$\begin{aligned} k_3 &= 0 \\ K_p &= -10.1937 \end{aligned} \quad (87)$$

Figura 16 - Resposta ao Degrau Unitário do Sistema Servo com Ganho P



Fonte: Autoria Própria (2017)

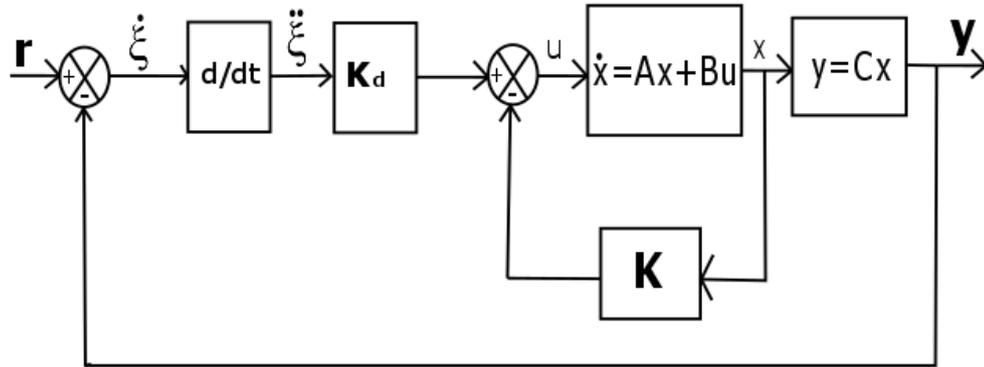
Ressalta-se que cabe ao projetista escolher os valores dos ganhos que melhor satisfaçam aos requisitos de respostas transitórias e permanente. Pode-se modificar os valores dos ganhos, e ao realizar isso será notável um erro de regime permanente para a posição do carro. Porém, conforme mostrado na Figura 16 é possível projetar e obter uma resposta satisfatória escolhendo adequadamente os valores dos ganhos.

3.2.2 Caso 2: Ação Derivativa (D)

Para esse caso, será aplicado somente a ação Derivativa na malha direta entre a planta e o comparador de erro. Ao fazer isso, nos deparamos novamente com a situação de que ao retirar o Integrador (ganho Integral K_i) do sistema, o servossistema do tipo 1 é desarranjado e a técnica controle mantém apenas as 4

variáveis de estados definidas na modelagem (equação 53). Porém, dessa vez o sinal de controle $u(t)$ é dependente da matriz de realimentação K , bem como, da ação derivativa aplicada ao erro do sistema concedido pelo comparador. A representação por diagrama de blocos desse sistema é dada na Figura 17, e o comportamento do sistema é regido pelo conjunto de equações 88 a 94:

Figura 17 – Diagrama de blocos do sistema servo com Ganho D



Fonte: Autoria Própria (2017)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (88)$$

$$y = Cx \quad (89)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx \quad (90)$$

$$\ddot{\xi} = -Cx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = -\dot{x} \quad (91)$$

Utilizando de um artifício matemático, podemos reescrever $\ddot{\xi}$ da seguinte maneira:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$\ddot{\xi} = -Tx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$u = -Kx + K_d \dot{\xi} = -x(K + K_d T) \quad (94)$$

Dessa forma, substituindo o sinal de controle (Equação 94) na Equação de Estados 88, chega-se à:

$$\dot{x} = Ax + B[-x(K + K_d T)] \quad (95)$$

Aplicando a entrada degrau em $t = 0$, a dinâmica do sistema, a partir desse valor de tempo, é descrita como:

$$[\dot{x}(t)] = A[x(t)] + B[u(t)] + [0]r(t) \quad (96)$$

De modo similar ao Caso 3.2.1 (e para qualquer sistema que utilize o método de alocação de polos) a etapa inicial no desenvolvimento do controlador é checar a restrição essencial do método de alocação de polos. Pois, para total aplicação desse método, é requerido que o sistema seja de estado completamente controlável. Para assegurar isso, deve-se analisar a matriz de controlabilidade do sistema, conforme:

$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix} \quad (97)$$

Como essa equação é idêntica a Equação 66 que testa a controlabilidade do sistema desenvolvido no Caso 3.2.1, esse sistema também é definido de estado completamente controlável. Dessa forma pode-se continuar com o desenvolvimento da técnica. Seguindo o desenvolvimento do Caso 3.2.1, pretende-se projetar um sistema assintoticamente estável, ou seja, com erro de estado estacionário nulo. Portanto, a saída em regime estacionário deve ter valor igual a referência degrau unitário adotada. Em regime estacionário o sistema é representado conforme:

$$[\dot{x}(\infty)] = A[x(\infty)] + B[u(\infty)] + [0]r(\infty) \quad (98)$$

Como a entrada degrau é sempre constante para $t > 0$, $r(\infty) = r(t) = r$, subtraindo as equações 96 e 98 temos:

$$[\dot{x}(t) - \dot{x}(\infty)] = A[x(t) - x(\infty)] + B[u(\infty) - u(\infty)] \quad (99)$$

Dessa forma, define-se:

$$\begin{aligned}x(t) - x(\infty) &= x_e(t) \\ u(t) - u(\infty) &= u_e(t)\end{aligned}\tag{100}$$

Logo, a Equação 99 pode ser reescrita como:

$$[\dot{x}_e(t)] = A[x_e(t)] + B[u_e(t)]\tag{101}$$

No qual para esse sistema, o sinal de controle agora é:

$$u_e(t) = -x_e(t)(K + K_d T)\tag{102}$$

Como o vetor de estado para esse sistema também não teve a ordem aumentada (devido a retirada do integrador), o vetor de erro é definido conforme a equação:

$$e(t) = [x_e(t)]\tag{103}$$

Dessa forma, pode-se descrever a equação 101 em termos da equação 103 como:

$$\dot{e} = Ae + Bu_e\tag{104}$$

No qual,

$$e(t) = [x_e(t)]\tag{105}$$

$$u_e = -\hat{K}e\tag{106}$$

Portanto, para esse caso de controle a matriz de ganhos \hat{K} é dependente da constante de ganho derivativo também, conforme a equação:

$$\hat{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 + K_d]\tag{107}$$

A próxima etapa de projeto é encontrar a matriz \hat{K} de retroação de estado (Equação 107) com a devida alocação de polos. Essa etapa, será pelo método de substituição direta que, resumindo, encontra-se os valores da matriz \hat{K} igualando duas equações características do sistema, conforme:

$$|sI - A + B\hat{K}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)\tag{108}$$

Nesse caso serão utilizados apenas 4 polos, diferentemente do proposto por Ogata (2010) o sistema teve a ordem diminuída. Portanto, serão mantidos o par de polo complexo conjugado e dois reais (ao invés de 3) conforme a equação:

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \mu_3 = -5, \mu_4 = -5 \quad (109)$$

Realizando as operações matemáticas para ambos os lados da igualdade da Equação 109, e com auxílio da plataforma computacional Matlab®, encontra-se as seguintes equações:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) = s^4 + 12s^3 + 49s^2 + 90s + 100 \quad (110)$$

$$|sI - A + B\hat{K}| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -k_1 - 20.601 & s - k_2 & -k_3 & -k_4 - K_d \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0.5k_1 + 0.4905 & 0.5k_2 & 0.5k_3 & 0.5(k_4 + K_d) + s \end{vmatrix} = \quad (111)$$

$$s^4 + (-k_2 + 0.5(k_4 + K_d))s^3 + (0.5k_3 - k_1 - 20.601)s^2 - [9.81(k_4 + K_d)]s - 9.81k_3$$

Compatibilizando os polinômios, através da equação:

$$\begin{pmatrix} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_2 + 0.5(k_4 + K_d) = 12 \\ 0.5k_3 - k_1 - 20.601 = 49 \\ -9.81(k_4 + K_d) = 90 \\ -9.81k_3 = 100 \end{pmatrix} \quad (112)$$

Encontra-se os seguintes valores para os ganhos:

$$\begin{aligned} k_1 &= -74.6978 \\ k_2 &= -16.5872 \\ k_3 &= -10.1937 \\ k_4 + K_d &= -9.1743 \end{aligned} \quad (113)$$

Nota-se na equação 121 que os valores dos ganhos são iguais aos encontrados no Caso 3.2.1 devido aos mesmos valores de polos terem sido utilizados. A diferença nesse caso é que o Ganho derivativo interfere no ganho k_4 , ao invés de k_3 como o ganho proporcional interferia. Também vale observar que, k_4 e K_d são inversamente proporcionais com um valor máximo definido. Ou seja, quando queremos o resultado do sistema com o máximo valor de K_d o ganho k_4 é nulo, e assim por diante.

Como a matriz de realimentação de estados de ganho \hat{K} (Equação 107) já foi encontrada, é possível obter a resposta ao degrau para o sistema conforme:

$$\dot{x} = A[x] + Bu + [0]r \quad (114)$$

E, dado que:

$$u = -(K + K_d T)x \quad (115)$$

A Equação 114 pode ser reescrita conforme a equação:

$$\dot{x} = [A - B(K + K_d T)]x \quad (116)$$

Ao substituímos os valores das matrizes A, B e T na Equação 116, encontra-se a equação a seguir que rege a dinâmica do sistema:

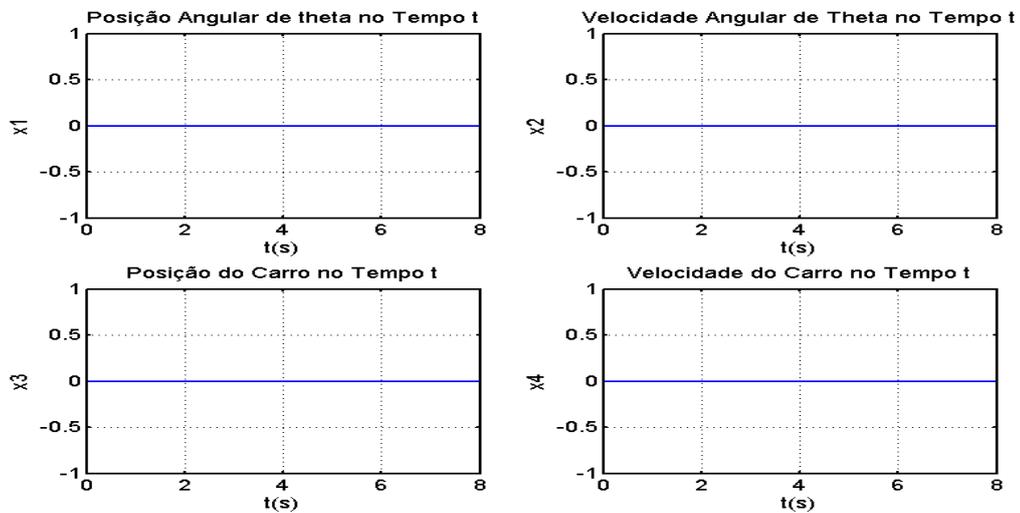
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -54.0968 & -16.5872 & -10.1937 & k_4 + K_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 36.8584 & 8.2936 & 5.0968 & -0.5(k_4 + K_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} r \quad (117)$$

Na Equação 117 acima, percebe-se que o sistema servo perde a sua atuação no sistema ao retirar o integrador (e ganho Integral consequentemente), pois a dinâmica do sistema é descrita sem a influência da referência adotada. Dessa forma, pode-se deduzir que os resultados que iremos alcançar serão 4 respostas nulas, pois, o sistema não atuará. Portanto, mesmo que essa visão seja intuitiva iremos comprovar por meio de simulação (Figura 18) para os valores de ganhos conforme a equação:

$$\begin{aligned} k_4 &= -5 \\ K_d &= -4.1743 \end{aligned} \quad (118)$$

Dessa forma, é evidente que para todas as combinações de ganhos, k_4 e K_d , o sistema não terá atuação no valor de referência (logo, não irá “seguir” a referência adotada). Pois, para o valor de referência degrau unitário adotado ao derivá-lo encontra-se o valor nulo devido ao erro não variar, ou seja, a parcela derivativa retirou a “constante r” ao derivar o sinal constante de erro. Portanto, o projeto de um sistema de controle servo por espaço de estados apenas com ganho Derivativo não é possível de ser realizado para uma referência degrau unitário.

Figura 18 - Resposta ao Degrau Unitário do Sistema Servo com Ganho D



Fonte: Autoria Própria (2017)

3.2.3 Caso 3: Ações Proporcional e Integral (PI)

O processo de implementação do ganho Proporcional na malha do servossistema do tipo 1 foi abordado por Arcolezi *et al* (2017), e conforme apresentado pelos autores, a aplicação não foi benéfica ao aplicar valores de ganho Proporcional negativos. Portanto, será realizado nesse tópico uma complementação aos detalhes, de desenvolvimento e resultados, obtidos tanto para valores positivos e negativos. Esse sistema pode ser descrito por diagrama de blocos conforme a Figura 19 e o conjunto de equações 119 a 122:

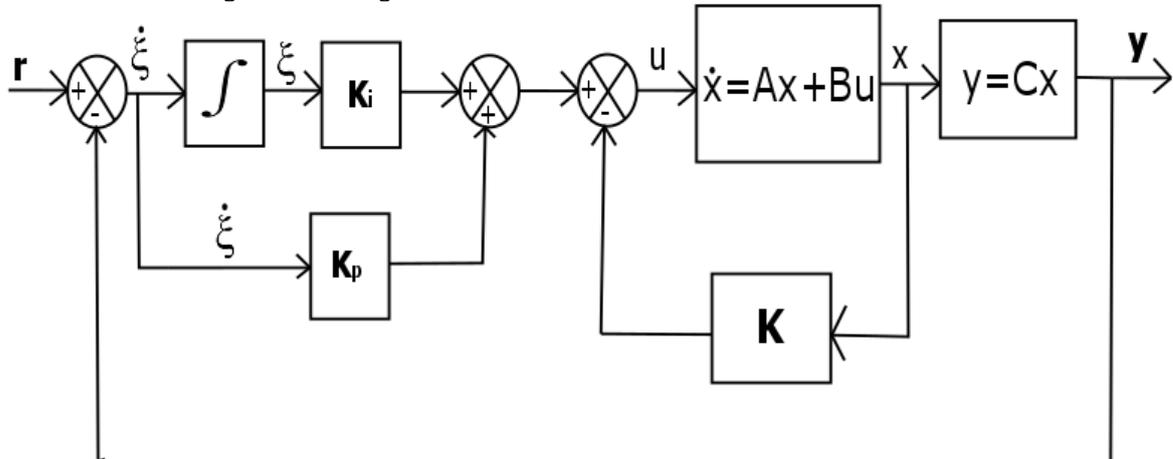
$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (119)$$

$$y = Cx \quad (120)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx \quad (121)$$

$$u = -Kx + K_i \xi + K_p \dot{\xi} = -x(K + K_p C) + K_p r + K_i \xi \quad (122)$$

Figura 19 - Diagrama de blocos do sistema servo com Ganhos PI



Fonte: Autoria Própria (2017)

Inicialmente, realizando uma análise teórica desse sistema é evidente que o integrador permanece no sistema. Por esse motivo, a saída do integrador cria uma nova variável de estado, ξ , e dessa forma a ideia básica de se construir um servossistema do tipo 1 permanece. Essa ideia, é baseada em projetar um regulador estável de ordem aumentada para corrigir o erro de estado estacionário. É pressuposto que com a inserção do ganho Proporcional nesse sistema em específico, o sistema responda mais rápido e aumente os valores de amplitude das respostas (características do Ganho Proporcional).

Seguindo o mesmo desenvolvimento realizado por Ogata (2010) e nos casos anteriores, deseja-se projetar um sistema assintoticamente estável. Portanto, aplicando a entrada degrau em $t = 0$ a dinâmica do sistema para $t > 0$ pode ser descrita pela equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (123)$$

Para o sistema atingir assintoticamente a estabilidade, deve-se projetar um sistema estável com $x(\infty)$, $u(\infty)$ e $\xi(\infty)$ constantes e erro $\dot{\xi} = 0$ em regime estacionário. Assim, é necessário que a saída siga o valor de referência adotada, ou seja, $y(\infty) = r$. Dessa forma, em regime permanente o comportamento do sistema é descrito na equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (124)$$

Subtraindo as equações 123 e 124 encontra-se a equação a seguir, pois, como a referência adotada é o degrau unitário para $t > 0$, $r(\infty) = r(t) = r$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \quad (125)$$

Define-se:

$$\begin{aligned} x(t) - x(\infty) &= x_e(t) \\ \xi(t) - \xi(\infty) &= \xi_e(t) \\ u(t) - u(\infty) &= u_e(t) \end{aligned} \quad (126)$$

Dessa forma, a equação 125 pode ser descrita em termos da equação 126 conforme:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (127)$$

No qual,

$$u_e(t) = -(K + K_p C)x_e + K_i \xi_e(t) + K_p r \quad (128)$$

Define-se um novo vetor de erro com ordem aumentada em 1, devido a variável de estado criada pela saída do integrador ξ , conforme:

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} \quad (129)$$

Dessa forma, a equação 127 pode ser definida em termos da equação 129 como:

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (130)$$

No qual,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, u_e = -\hat{K}e \quad (131)$$

A matriz de ganho K de realimentação de estado para esse caso é definida conforme a equação:

$$\hat{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 + K_p \quad k_4 \mid -K_i] \quad (132)$$

Substituindo os valores das matrizes A, B e C , temos:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{C} = [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0] \quad (133)$$

Para esse caso de estudo, é possível verificar a controlabilidade do sistema analisando a matriz P a seguir (Equação 134) com as mesmas restrições da matriz de controlabilidade M (Equação 19).

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (134)$$

Através da ferramenta computacional Matlab® encontramos o posto e o determinante da matriz P como:

$$P = 5$$

$$D = 9.81$$

Portanto, a matriz P de ordem 5 é não singular e o sistema é de estado completamente controlável. A próxima etapa de projeto, é encontrar a matriz \hat{K} de retroação de estado (Equação 132) com a devida alocação de polos. Essa etapa, será pelo método de substituição direta que, resumindo, encontra-se os valores da matriz \hat{K} igualando duas equações características do sistema (Equação 135). Para esse caso, a equação 135 se torna a equação 136, devido a dinâmica do sistema ter sido alterada pela implementação do ganho proporcional.

$$|sI - \hat{A} + B\hat{K}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) \quad (135)$$

$$|sI - \hat{A} + \hat{B}(K + K_p\hat{C})| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) \quad (136)$$

Realizando as devidas operações matemáticas em ambos lados da igualdade da equação 136 e com auxílio da ferramenta Matlab® encontra-se as equações:

$$\begin{aligned} & (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) \\ & = s^5 + 17s^4 + 109s^3 + 335s^2 + 550s + 500 \end{aligned} \quad (137)$$

$$\left| sI - \hat{A} + \hat{B}(K + K_p \hat{C}) \right| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -(20,601 + k_1) & s - k_2 & -(k_3 + K_p) & -k_4 & K_i \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ (0,4905 + 0,5k_1) & 0,5k_2 & 0,5(k_3 + K_p) & s + 0,5k_4 & -0,5K_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \end{vmatrix} = \quad (138)$$

$$\begin{aligned} & s^5 + s^4(-k_2 + 0,5k_4) + s^3(-k_1 + 0,5(k_3 + K_p)) - 20,610 + s^2(-0,5K_i - 9,81k_4) \\ & - 9,81s(k_3 + K_p) + 9,81K_i \end{aligned}$$

Compatibilizando os polinômios conforme:

$$\begin{pmatrix} s^5 \\ s^4 \\ s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^5 = s^5 \\ -k_2 + 0,5k_4 = 17 \\ -k_1 + 0,5(k_3 + K_p) - 20,601 = 109 \\ -0,5K_i - 9,81k_4 = 335 \\ -9,81(k_3 + K_p) = 550 \\ 9,81K_i = 500 \end{pmatrix} \quad (139)$$

Encontra-se os seguintes valores para os ganhos:

$$\begin{aligned} k_1 & = -157,6336 \\ k_2 & = -35,3733 \\ k_4 & = -36,7466 \\ K_i & = 50,9684 \\ k_3 + K_p & = -56,0652 \end{aligned} \quad (140)$$

Nesse caso, os ganhos k_3 e K_p também são inversamente proporcionais com valor máximo definido (Iguar ao caso 3.2.1).

Como a matriz de ganho K (Equação 132) já foi encontrada, é possível obter a resposta ao degrau para a posição do carro conforme a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (141)$$

E, dado que:

$$u = -(K + K_p C)x + K_i \xi + K_p r \quad (142)$$

A equação 141 pode ser reescrita conforme a equação a seguir:

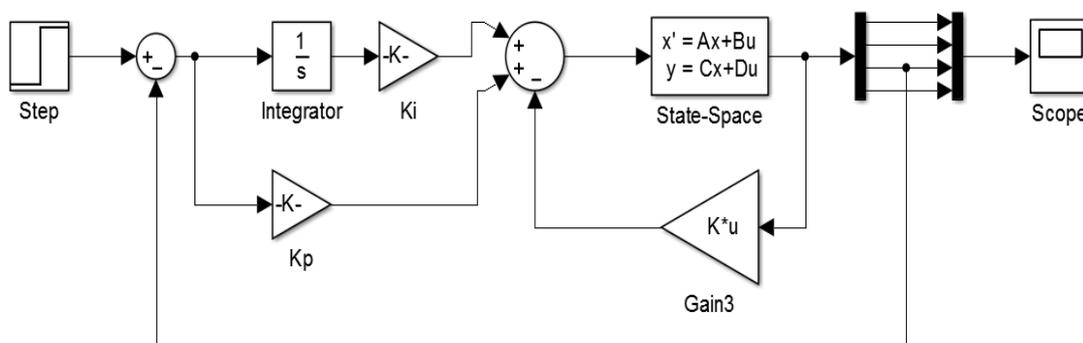
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B(K + K_p C) & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_p \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (143)$$

Substituindo os valores na equação 143, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -137,0326 & -35,3733 & k_3 + K_p & -36,7466 & 50,9684 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 78,3263 & 17,6867 & -0.5(k_3 + K_p) & 18,3733 & -25,4842 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -K_p \\ 0 \\ 0.5K_p \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (144)$$

Ao analisarmos a equação 144, percebe-se que a parcela de ganho Proporcional irá atuar no último termo da equação, ou seja, a resposta do sistema (posição do carro) é dependente da atuação dos ganhos Integral e Proporcional no sinal de erro. Dessa maneira, para simular o resultado de controle para os ganhos Proporcional e Integral na malha servo deve-se selecionar os valores para k_3 e K_p e utilizar das ferramentas computacionais Matlab® e Simulink® (Figura 20) para encontrar a resposta ao degrau.

Figura 20 - Esquema no Simulink do Sistema Servo com Ganhos PI



Fonte: Autoria própria (2017)

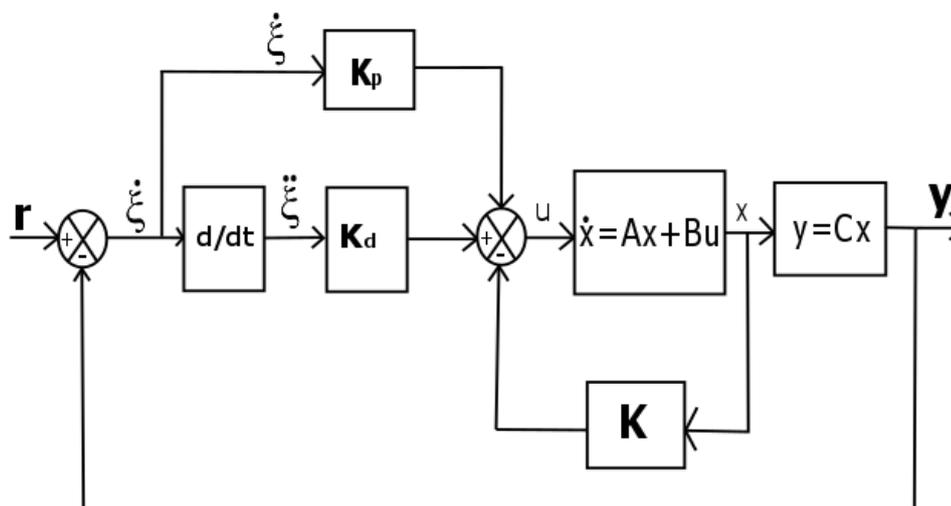
Portanto, é possível projetar um sistema de controle servo por espaço de estados com ganhos Proporcional e Integral. Pois, conforme apresentado por Arcolezi *et al* (2017) o ganho proporcional quando aumentado negativamente atuou em conformidade com a Tabela 1 apresentada na revisão bibliográfica. Ou seja, o sistema apresentou uma resposta mais rápida, com maior valor de sobressinal e o tempo de acomodação pouco variou. Claro que, existem valores que o sistema apresenta melhores resultados, porém cabe ao projetista selecionar os critérios de

respostas transitórias e permanente para serem atendidos, e no caso desse trabalho isso não foi levado em conta.

3.2.4 Caso 4: Ações Proporcional e Derivativa (PD)

Retirando-se novamente o integrador e ganho Integral (K_i) da malha do servossistema do tipo 1, o sistema é novamente desarranjado e as variáveis de estados continuam sendo aquelas definidas na modelagem (Equação 53). Porém, para o servossistema a ser desenvolvido nesse tópico iremos implementar os ganhos Proporcional (K_p) e Derivativo (K_d) (em conjunto com o derivador), na malha do sistema e analisar os resultados ao se fazer isso. Nesse caso o sinal de controle $u(t)$ é dependente da matriz de realimentação K , como também, das ações proporcional e derivativa aplicadas ao sinal de erro. Esse sistema é representado pelo seguinte diagrama de blocos (Figura 21), e as equações que regem o comportamento desse sistema são o conjunto de equações 145 a 151:

Figura 21 - Diagrama de blocos do sistema servo com Ganhos PD



Fonte: Autoria própria (2017)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (145)$$

$$y = Cx \quad (146)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx \quad (147)$$

$$\ddot{\xi} = -C\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = -\dot{x} \quad (148)$$

Utilizando do mesmo artifício matemático que no Caso 3.2.2, podemos reescrever $\ddot{\xi}$ da seguinte maneira:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (149)$$

$$\ddot{\xi} = -Tx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (150)$$

$$u = -Kx + K_p\dot{\xi} + K_d\ddot{\xi} = -x(K + K_pC + K_dT) + K_p r \quad (151)$$

Dessa maneira, substituindo o sinal de controle (equação 151) na Equação de Estados 145, chega-se na equação:

$$\dot{x} = Ax + B[-x(K + K_pC + K_dT) + K_p r] \quad (152)$$

Aplicando a entrada degrau em $t = 0$, a dinâmica do sistema, a partir desse valor de tempo, é descrita como:

$$[\dot{x}(t)] = A[x(t)] + B[u(t)] + [0]r(t) \quad (153)$$

De modo similar aos Caso 3.2.1 e 3.2.2 a etapa inicial no desenvolvimento do controlador é checar a restrição essencial do método de alocação de polos. Pois, para total aplicação desse método, é requerido que o sistema seja de estado completamente controlável. Para assegurar isso, deve-se analisar a matriz de controlabilidade do sistema conforme:

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix} \quad (154)$$

Como essa equação é idêntica a equação 66 que testa a controlabilidade do sistema desenvolvido no Caso 3.2.1, esse sistema também é definido de estado completamente controlável. Dessa forma pode-se continuar com o desenvolvimento da técnica. Seguindo o desenvolvimento dos Caso 3.2.1 e 3.2.2, pretende-se projetar um sistema assintoticamente estável, ou seja, com erro de estado estacionário nulo. Portanto, a saída em regime estacionário deve ter valor igual a referência degrau unitário adotada. Em regime estacionário o sistema é representado conforme:

$$[\dot{x}(\infty)] = A[x(\infty)] + B[u(\infty)] + [0]r(\infty) \quad (155)$$

Como a entrada degrau é sempre constante para $t > 0$, $r(\infty) = r(t) = r$, subtraindo as equações 153 e 155 tem-se:

$$[\dot{x}(t) - \dot{x}(\infty)] = A[x(t) - x(\infty)] + B[u(\infty) - u(\infty)] \quad (156)$$

Dessa forma, define-se:

$$\begin{aligned} x(t) - x(\infty) &= x_e(t) \\ u(t) - u(\infty) &= u_e(t) \end{aligned} \quad (157)$$

Logo, reescrevendo a Equação 156 em termos da equação 157 tem-se:

$$[\dot{x}_e(t)] = A[x_e(t)] + B[u_e(t)] \quad (158)$$

Para esse sistema, o sinal de controle agora é:

$$u_e(t) = -x_e(t)(K + K_p C + K_d T) + K_p r \quad (159)$$

Como o vetor de estado para esse sistema também não teve a ordem aumentada (devido a retirada do integrador), o vetor de erro é definido conforme a equação:

$$e(t) = [x_e(t)] \quad (160)$$

Dessa maneira, pode-se descrever a equação 158 em termos da equação 160 como:

$$\dot{e} = Ae + Bu_e \quad (161)$$

No qual,

$$u_e = -\hat{K}e \quad (162)$$

Para esse caso de controle a matriz de ganhos \hat{K} é dependente das constantes de ganho proporcional e ganho derivativo, conforme:

$$\hat{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 + K_p \quad k_4 + K_d] \quad (163)$$

Seguindo o mesmo procedimento dos Casos 3.2.1 e 3.2.2, a próxima etapa de projeto é encontrar a matriz \hat{K} de retroação de estado (Equação 163) com a devida alocação de polos. Essa etapa, será pelo método de substituição direta que, resumindo, encontra-se os valores da matriz \hat{K} igualando duas equações características do sistema, conforme:

$$|sI - A + B\hat{K}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) \quad (164)$$

Analogamente aos Casos 3.2.1 e 3.2.2, serão mantidos o par de polo complexo conjugado e dois reais (ao invés de 3) conforme a equação:

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \mu_3 = -5, \mu_4 = -5 \quad (165)$$

Com auxílio da plataforma computacional Matlab® e algumas operações matemáticas em ambos os lados da equação 164, encontra-se as equações:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) = s^4 + 12s^3 + 49s^2 + 90s + 100 \quad (166)$$

$$|sI - A + B\hat{K}| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -k_1 - 20.601 & s - k_2 & -k_3 & -k_4 - K_d \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0.5k_1 + 0.4905 & 0.5k_2 & 0.5k_3 & 0.5(k_4 + K_d) + s \end{vmatrix} = \quad (167)$$

$$s^4 + [-k_2 + 0.5(k_4 + K_d)]s^3 + [0.5(k_3 + K_p) - k_1 - 20.601]s^2 - [9.81(k_4 + K_d)]s - 9.81(k_3 + K_p)$$

Compatibilizando os polinômios, através de:

$$\begin{pmatrix} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_2 + 0.5(k_4 + K_d) = 12 \\ 0.5(k_3 + K_p) - k_1 - 20.601 = 49 \\ -9.81(k_4 + K_d) = 90 \\ -9.81(k_3 + K_p) = 100 \end{pmatrix} \quad (168)$$

Encontra-se os seguintes valores para os ganhos:

$$\begin{aligned} k_1 &= -74.6978 \\ k_2 &= -16.5872 \\ k_3 + K_p &= -10.1937 \\ k_4 + K_d &= -9.1743 \end{aligned} \quad (169)$$

Nota-se na equação 169 que os valores dos ganhos são iguais devido aos mesmos valores de polos terem sido utilizados nos Casos 3.2.1 e 3.2.2. A diferença nesse caso é que o Ganho derivativo interfere no ganho k_4 , e o Ganho Proporcional interfere no ganho k_3 . Também vale observar que, tanto k_4 e K_d são inversamente proporcionais, como também, k_3 e K_p são. Ou seja, ao aumentarmos o valor de um o outro é diminuído.

Como a matriz de realimentação de estados de ganho \hat{K} (Equação 163) já foi encontrada, é possível obter a resposta ao degrau para o sistema conforme:

$$\dot{x} = A[x] + Bu + [0]r \quad (170)$$

E, dado que:

$$u = -(K + K_p C + K_d T)x + K_p r \quad (171)$$

A equação 201 pode ser reescrita conforme a seguinte equação:

$$\dot{x} = [A - B(K + K_p C + K_d T)]x + [BK_p]r \quad (172)$$

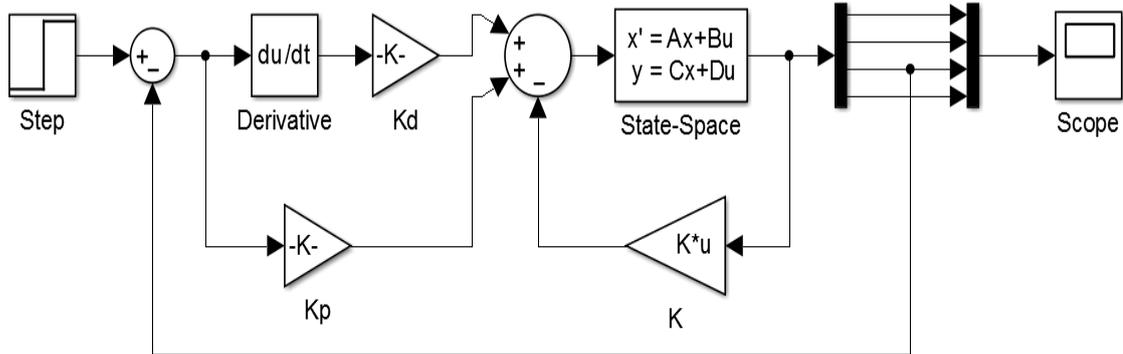
Ao substituímos os valores na equação 172, encontra-se a equação a seguir que rege a dinâmica do sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -54.0968 & -16.5872 & k_3 + K_p & k_4 + K_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 36.8584 & 8.2936 & -0.5(k_3 + K_p) & -0.5(k_4 + K_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -K_p \\ 0 \\ 0.5K_p \end{bmatrix} r \quad (173)$$

Na equação 173 acima percebe-se que o sistema servo não perde a sua atuação ao retirar o integrador (e ganho Integral consequentemente). Logo, é possível projetar um sistema de controle servo por espaço de estados com ganhos Proporcional e Derivativo. E, a resposta ao degrau unitário desse sistema pode ser encontrada com ajuda das ferramentas computacionais Matlab® e Simulink® (Figura 22), substituindo os valores dos ganhos Proporcional, Derivativo e de retroação de

estados de acordo com a Equação 169. Cabe lembrar que, depende do projetista escolher os parâmetros dos ganhos caso queira alcançar diferentes respostas transitórias e de regime permanente.

Figura 22 - Esquema no Simulink do Sistema Servo com Ganhos PD



Fonte: Autoria própria (2017)

3.2.5 Caso 5: Ações Proporcional, Integral e Derivativa (PID)

Para esse último caso, iremos representar os resultados de modelagem e controle quando inseridas as três parcelas de ação de controle na malha servo para a planta do pêndulo invertido sobre carro. Esse sistema é representado por diagrama de blocos conforme a Figura 23 e o conjunto de equações 174 a 180 regem o comportamento do sistema.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (174)$$

$$y = Cx \quad (175)$$

$$u = -Kx + k_I \xi + k_P \dot{\xi} + k_D \ddot{\xi} \quad (176)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx \quad (177)$$

$$\ddot{\xi} = -C\dot{x} = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = [-\dot{x}] \quad (178)$$

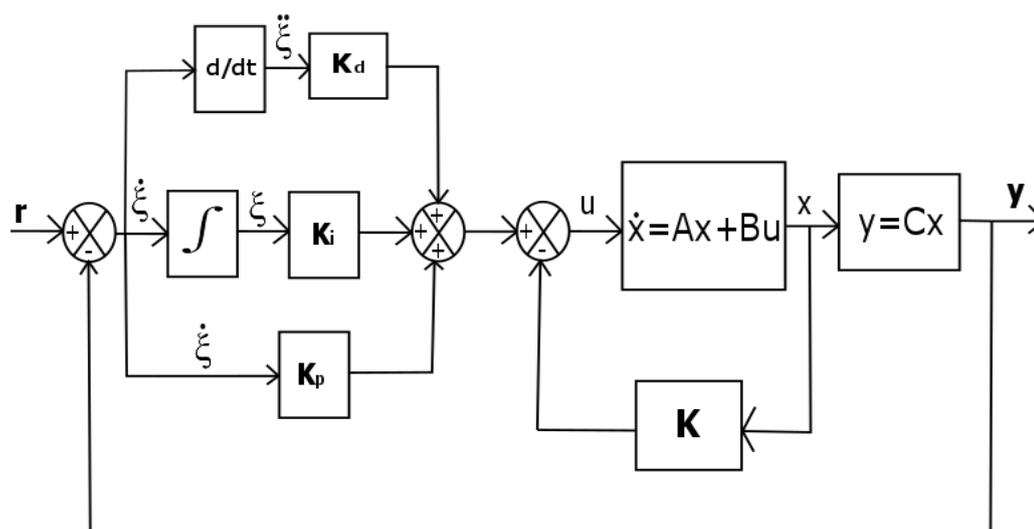
A fim de viabilizar a representação da variável $\ddot{\xi}$, novamente, com base na definição do vetor de estado, a equação 178 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{\xi} = Tx \quad (179)$$

No qual,

$$T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -1] \quad (180)$$

Figura 23 - Diagrama de blocos do sistema servo com os Ganhos PID



Fonte: Autoria própria (2017)

Novamente, ao realizar uma análise teórica nesse sistema, percebe-se que como o Integrador permanece no sistema a saída dele cria uma nova variável de estado ξ . Dessa forma, a ideia básica do projeto de um servossistema do tipo 1 permanece, ou seja, deseja-se projetar um regulador estável de ordem aumentada para levar o novo vetor de erro do sistema à zero.

Seguindo o mesmo desenvolvimento realizado no Caso 3.2.3, deseja-se projetar um sistema assintoticamente estável. Portanto, aplicando a entrada degrau em $t = 0$ a dinâmica do sistema para $t > 0$ pode ser descrita pela equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (181)$$

Para o sistema atingir assintoticamente a estabilidade, deve-se projetar um sistema estável com $x(\infty)$, $u(\infty)$ e $\xi(\infty)$ constantes e erro $\dot{\xi} = 0$ em regime estacionário. Assim, é necessário que a saída siga o valor de referência adotada, ou

seja, $y(\infty) = r$. Dessa forma, em regime permanente o comportamento do sistema é descrito na equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (182)$$

Subtraindo as equações 181 e 182 encontra-se a equação a seguir, pois, como a referência adotada é o degrau unitário para $t > 0$, $r(\infty) = r(t) = r$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \quad (183)$$

Define-se:

$$\begin{aligned} x(t) - x(\infty) &= x_e(t) \\ \xi(t) - \xi(\infty) &= \xi_e(t) \\ u(t) - u(\infty) &= u_e(t) \end{aligned} \quad (184)$$

Dessa forma, a equação 183 pode ser descrita em termos da equação 184 conforme:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (185)$$

No qual, o sinal de controle agora é:

$$u_e(t) = -(K + K_p C + K_d T) x_e + K_i \xi_e(t) + K_p r \quad (186)$$

Analogamente ao Caso 3.2.3, define-se um novo vetor de erro com ordem aumentada em 1, devido a variável de estado criada pela saída do integrador ξ , conforme a equação:

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} \quad (187)$$

Dessa forma, a equação 185 pode ser definida em termos da equação 187 como:

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (188)$$

No qual,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, u_e = -\hat{K}e \quad (189)$$

A matriz de ganho K de realimentação de estado agora é:

$$\hat{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 + K_p \quad k_4 + K_d \quad | \quad -K_i] \quad (190)$$

Substituindo os valores das matrizes A, B e C , temos:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (191)$$

O teste de controlabilidade do sistema também foi feito no caso 3.2.3, e como as matrizes são idênticas iremos definir que esse sistema é de estado completamente controlável. Caso o leitor tenha dúvida quanto a isso sugere-se retornar ao Caso 3.2.3 e verificar o teste realizado.

A próxima etapa de projeto, é encontrar a matriz \hat{K} de retroação de estado (equação 190) com a devida alocação de polos. Essa etapa, será pelo método de substituição direta que, resumindo, encontra-se os valores da matriz \hat{K} igualando duas equações características do sistema (Equação 192). Para esse caso, a equação 192 se torna a equação 193, devido a dinâmica do sistema ter sido alterada pela implementação do ganho proporcional e derivativo.

$$|sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) \quad (192)$$

$$|sI - \hat{A} + \hat{B}(K + K_p C + K_d T)| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) \quad (193)$$

Substituindo os polos (Equação 37) e realizando algumas operações matemáticas com auxílio do Matlab® na equação 192, encontra-se as seguintes equações:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) = s^5 + 17s^4 + 109s^3 + 335s^2 + 550s + 500 \quad (194)$$

$$\begin{aligned}
& |sI - \hat{A} + \hat{B}(K + K_p C + K_d T)| = \\
& \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -(20,601 + k_1) & s - k_2 & -(k_3 + K_p) & -(k_4 - K_d) & K_i \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ (0,4905 + 0,5k_1) & 0,5k_2 & 0,5(k_3 + K_p) & s + 0,5(k_4 + K_d) & -0,5K_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \end{vmatrix} = \quad (195) \\
& s^5 + s^4[-k_2 + 0,5(k_4 + K_d)] + s^3[-k_1 + 0,5(k_3 + K_p) - 20,610] \\
& + s^2[0,5k_1 - 9,81(k_4 + K_d)] + s[-9,81(k_3 + K_p)] - 9,81k_1
\end{aligned}$$

Compatibilizando os polinômios conforme a equação a seguir, encontra-se os seguintes valores para os ganhos (Equação 197):

$$\begin{pmatrix} s^5 \\ s^4 \\ s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^5 = s^5 \\ -k_2 + 0,5(k_4 + K_d) = 17 \\ -k_1 + 0,5(k_3 + K_p) - 20,601 = 109 \\ -0,5K_i - 9,81(k_4 + K_d) = 335 \\ -9,81(k_3 + K_p) = 550 \\ 9,81K_i = 500 \end{pmatrix} \quad (196)$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= -157,6336 \\
k_2 &= -35,3733 \\
k_4 + K_d &= -36,7466 \\
K_i &= 50,9684 \\
k_3 + K_p &= -56,0652
\end{aligned} \quad (197)$$

Nota-se na equação 197 que os valores dos ganhos são iguais ao Caso 3.2.3 devido aos mesmos valores de polos terem sido utilizados. A diferença nessa situação é que o Ganho derivativo interfere no ganho k_4 , e o Ganho Proporcional interfere no ganho k_3 . Também vale observar que, tanto k_4 e K_d são inversamente proporcionais, como também, k_3 e K_p são. Ou seja, ao aumentarmos o valor de um o outro é diminuído.

Como a matriz de ganho K (equação 190) já foi encontrada, é possível obter a resposta ao degrau para a posição do carro conforme a equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (198)$$

E, dado que:

$$u = -(K + K_p C + K_d T)x + K_i \xi + K_p r \quad (199)$$

A equação 198 pode ser reescrita conforme a equação 200:

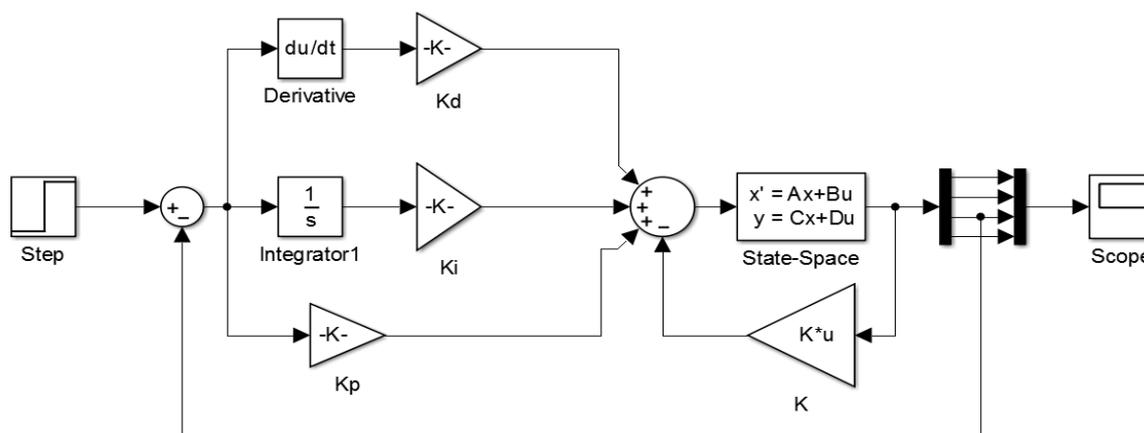
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B(K + K_p C + K_d T) & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_p \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (200)$$

Substituindo os valores na equação 200, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -137,0326 & -35,3733 & k_3 + K_p & k_4 + K_d & 50,9684 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 78,3263 & 17,6867 & -0.5(k_3 + K_p) & -0.5(k_4 + K_d) & -25,4842 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -K_p \\ 0 \\ 0.5K_p \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (201)$$

Nota-se na equação 201 que o sistema servo não perde a sua atuação ao retirar o integrador (e ganho Integral consequentemente). Portanto, é possível projetar um sistema de controle servo por espaço de estados com os ganhos PID, e, para obter-se a resposta do sistema à entrada degrau unitário deve-se substituir os valores dos ganhos conforme a Equação 197, respeitando as igualdades, com auxílio das plataformas computacionais Matlab® e Simulink® (Figura 24). Cabe lembrar que, depende do projetista escolher os parâmetros dos ganhos caso queira alcançar diferentes respostas transitórias e de regime permanente.

Figura 24 - Esquema no Simulink do Sistema Servo com Ganhos PID



Fonte: Autoria própria (2017)

4 SISTEMA DE CONTROLE REGULADOR

A característica que determina se um sistema de controle é do tipo regulador ou servo é o valor de entrada. O sistema regulador é caracterizado pelo valor da sua referência ser constante e permitir variações na carga. Ou seja, esse sistema de controle é normalmente utilizado para compensar os efeitos de perturbações externas (rejeição de distúrbios), a fim de manter a saída constante para o valor de referência (BOTTURA, 1982; MANDAL, 2006; OGATA, 2010).

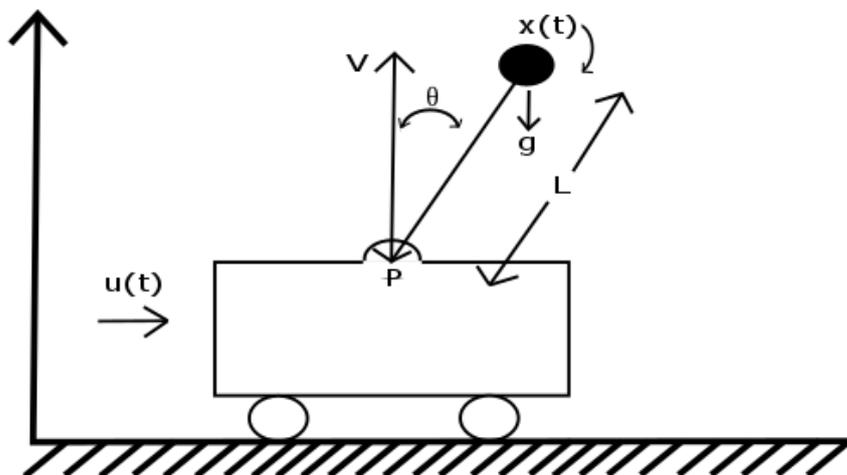
Para exemplificar o caso desse sistema de controle aplicado ao problema neste trabalho, pretende-se desenvolver um sistema de controle que esteja apto para controlar o sistema do pêndulo invertido sob efeitos de perturbações externas e mudanças no valor da carga. Isto é, na prática seria como dar leves “tapas” na haste para perturbar o sistema, ou, para a situação de mudança de carga colocar objetos sobre o topo da haste do pêndulo e o sistema conseguir controlar com desempenhos satisfatórios. Isso pode ser visto no trabalho original do autor Oppenheim (1987) em uma das suas aulas on line do curso de *Sinais e Sistemas* pelo MIT.

Devido a característica do sistema regulador permitir variações na carga, no processo de modelagem e controle nesse caso, as massas do sistema serão ignoradas. Por definição, para esse trabalho assume-se que o ângulo é constantemente medido e apresentado para comparação de erro. Dessa forma o sistema de controle responde com a devida aceleração do móvel para estabilizar a haste do pêndulo.

4.1 MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA DO PÊNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO

A planta do pêndulo invertido sobre carro será representada em um plano bidimensional (Figura 25), no qual, a haste do pêndulo pode cair a qualquer momento caso não seja aplicada uma força de controle. O movimento desse sistema é restrito ao plano da página, ou seja, o carro pode se mover apenas para a esquerda ou direita. As forças que atuam nesse sistema são os distúrbios externos e a aceleração do móvel.

Figura 25 - Sistema do pêndulo invertido sobre carro



Fonte: Autoria Própria (2017)

No qual,

$u(t)$ = sinal de controle (aceleração do móvel);

L = comprimento da haste;

θ = ângulo de equilíbrio da haste;

g = aceleração da gravidade;

$x(t)$ = entrada do sistema (distúrbio na haste L).

Dessa forma, a dinâmica do sistema pode ser descrita pelas equações 202, 203 e 204.

$$L\ddot{\theta} = g\sin[\theta(t)] + Lx(t) - a(t)\cos[\theta(t)] \quad (202)$$

Como será adotado um método de controle linear, PID, o sistema será linearizado em torno do ponto de equilíbrio da haste na posição vertical. Define-se:

$$\sin\theta(t) = \theta(t), \quad \cos\theta(t) = 1 \quad (203)$$

Portanto, linearizando a equação 202 obtemos a equação a seguir que descreve o comportamento linear do pêndulo invertido sobre carro (Figura 25):

$$L\ddot{\theta} = g\theta(t) + Lx(t) - a(t) \quad (204)$$

Os parâmetros adotados para esse trabalho são $L = 1 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

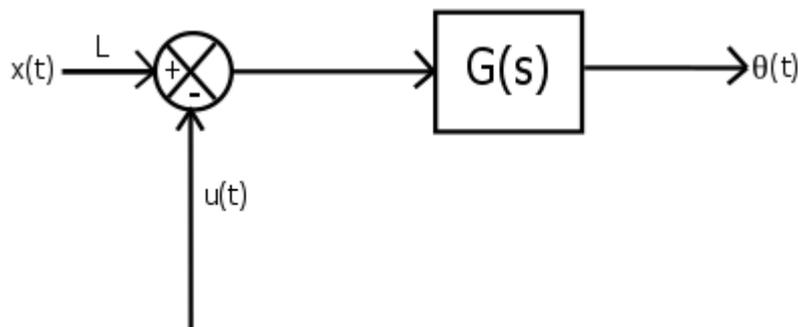
4.2 TÉCNICAS DE CONTROLE E MODELAGEM DO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Pelo motivo do qual as técnicas de controle do domínio da frequência só podem ser aplicadas a sistemas SISO's (*Single Input and Single Output*), pretende-se com esse método controlar apenas a posição da haste do pêndulo, e para tanto, pressupõe-se que o carro é livre para se mover no plano da página. A entrada desse sistema será a força aplicada ao móvel e a saída, que desejamos controlar, será a posição angular. Como esse sistema vai ser modelado por funções de transferência, o passo inicial é aplicar a transformada de Laplace (Equação 4) na equação governante do sistema (equação 235). Feito isso, encontra-se a função de transferência de malha aberta para o sistema (equação 236):

$$\theta(s) = [LX(s) - A(s)] \frac{1}{Ls^2 - g} \quad (205)$$

A representação por diagrama de blocos do comportamento do sistema em malha aberta é apresentado na Figura 26 e pelas equações 206 e 207.

Figura 26 - Diagrama de blocos do sistema regulador em malha aberta



Fonte: Autoria Própria (2017)

$$\theta(s) = G(s)[LX(s) - A(s)], \text{ onde } G(s) = \frac{1}{Ls^2 - g} \quad (206)$$

$$\theta(s) = \frac{1}{Ls^2 - g} [LX(s) - A(s)] = \frac{\frac{1}{L}}{s^2 - \frac{g}{L}} [LX(s) - A(s)] \quad (207)$$

Substituindo os valores dos parâmetros adotados para esse projeto, a Função de Transferência de Malha Aberta (FTMA) para o sistema do pêndulo invertido modelado nesse trabalho é conforme a seguinte equação:

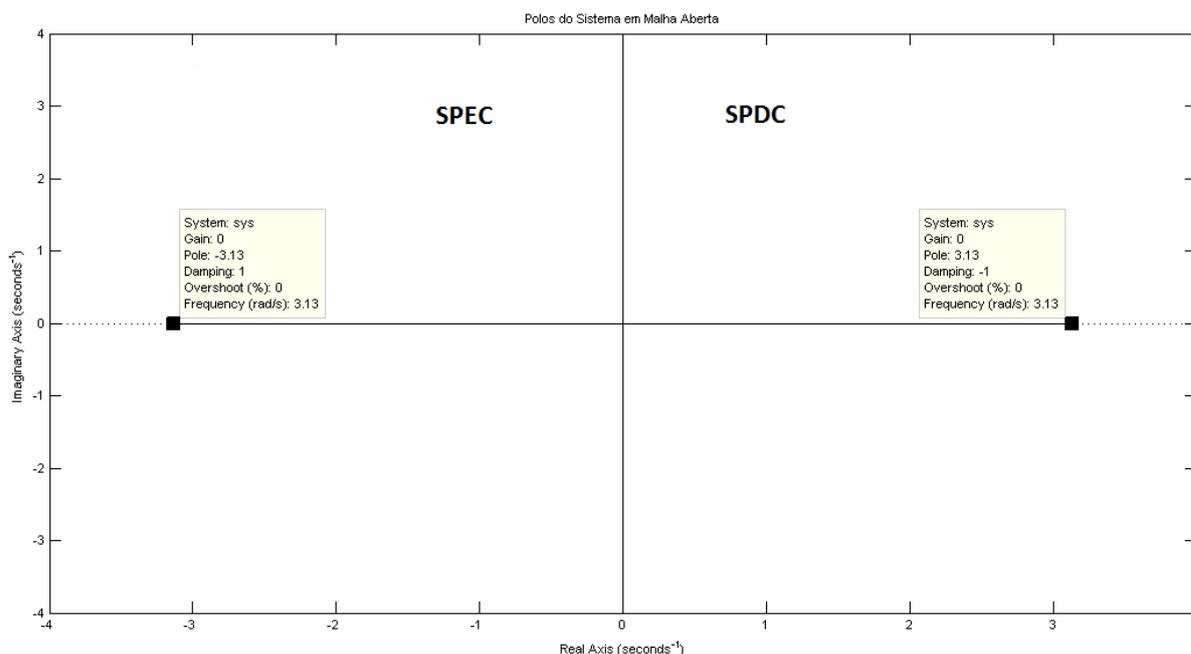
$$FTMA = \theta(s) = \frac{1}{s^2 - 9.8} [X(s) - A(s)] \quad (208)$$

Portanto, a verificação da estabilidade desse sistema em malha aberta pode ser, de modo simplificado, pela análise dos polos da seguinte equação característica:

$$a(s) = s^2 - 9.8 \quad (209)$$

Dessa forma, os polos desse sistema são demonstrados na Figura 27 e conforme a equação 210:

Figura 27 - Polos do Sistema do Pêndulo Invertido em Malha Aberta



Fonte: Autoria Própria (2017)

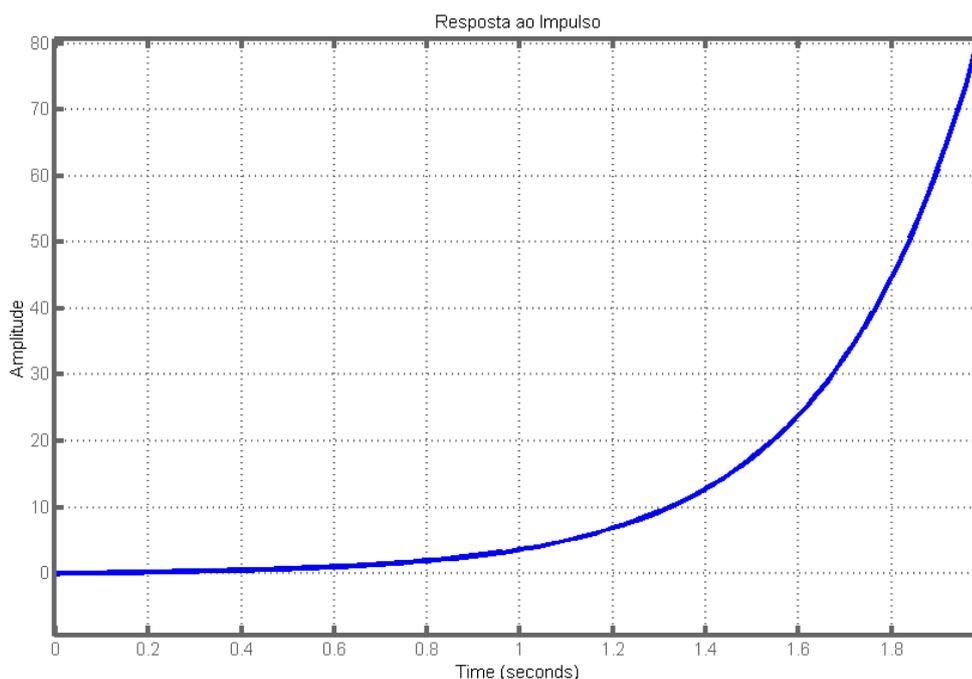
$$s_{1,2} = \pm\sqrt{9.8} \quad (210)$$

Portanto, como existe um polo no Semiplano Direito Complexo (SPDC) o sistema é de comportamento instável. Para validar a afirmação de instabilidade do sistema, iremos analisar a FTMA (Equação 208) do sistema pelo critério de Routh-Hurwitz. Dessa forma, a partir da equação característica do sistema (Equação 209),

conclui-se diretamente que o sistema tem comportamento instável. Pois, o sistema não atende a condição necessária (mas não suficiente) de que na equação característica do sistema não podem haver coeficientes nulos ou negativos. E nesse caso, o sistema apresenta ambas restrições, ou seja, o termo s^1 é nulo e o termo s^0 é sempre negativo. O valor do termo s^0 será sempre negativo nesse trabalho, devido ao termo g sempre representar a aceleração da gravidade de valor positivo $g = 9.8$, e L sempre representar o comprimento da haste positivo $L = 1$. Devido ao não atendimento dessa condição, conclui-se que o sistema do pêndulo invertido sobre carro em malha aberta é de fato instável.

Através da ferramenta computacional Matlab®, o resultado de simulação para esse sistema em malha aberta com entrada impulso é apresentada na Figura 28.

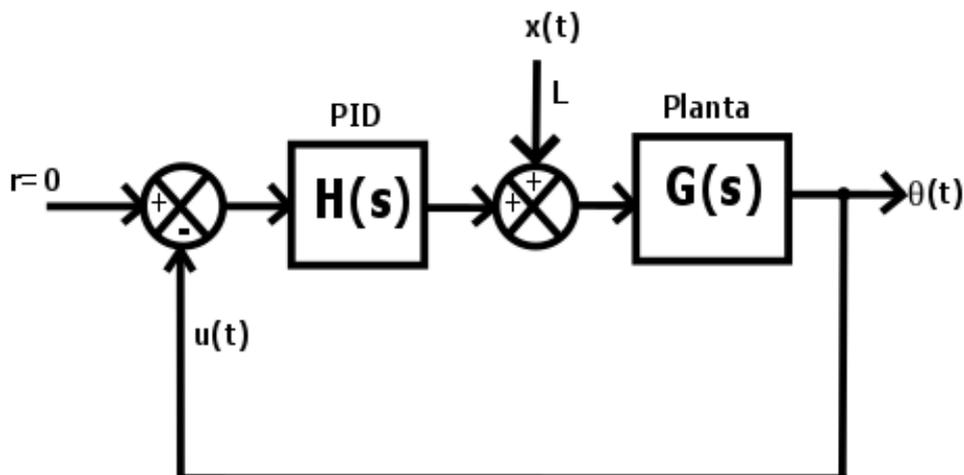
Figura 28 - Resposta ao Impulso do Sistema Regulador em Malha Aberta



Fonte: Autoria Própria (2017)

Portanto, como o sistema em malha aberta é completamente instável pretende desenvolver o sistema de controle regulador, conforme os objetivos do trabalho, com intuito de estabilizar o sistema. Esse sistema é representado pelo princípio da superposição, por uma referência nula e outra sendo os distúrbios que a planta recebe, conforme o seguinte diagrama de blocos (Figura 29).

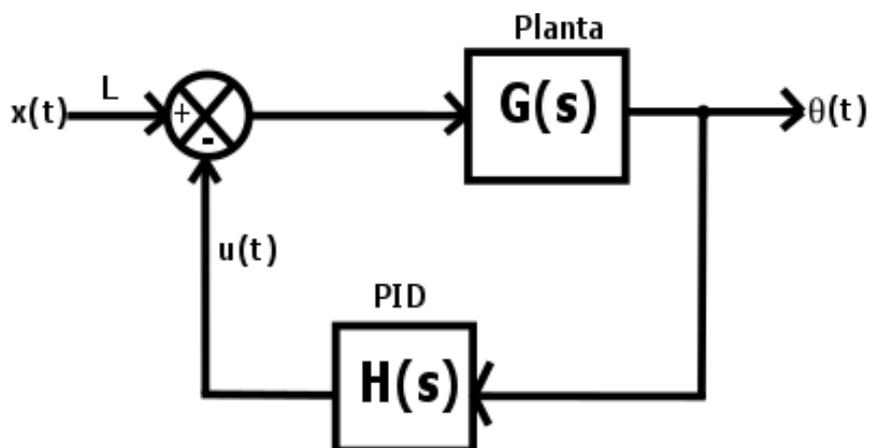
Figura 29 - Esquema de Representação do Sistema de Controle Regulador PID



Fonte: Autoria Própria (2017)

Dessa forma, o sistema pode ser remanejado conforme a Figura 30 e sua dinâmica é descrita pelas equações 211 e 212:

Figura 30 – Reconfiguração da representação do sistema regulador



Fonte: Autoria Própria (2017)

No qual, para evitar repetições do diagrama de blocos acima e da definição dos parâmetros, eles vão ser definidos apenas nesse tópico como:

$u(t)$, $H(s)$ = sinal de controle (aceleração do móvel);

L = comprimento da haste;

g = aceleração da gravidade;

$\theta(t)$ = saída do sistema;

$x(t)$ = entrada do sistema constante (distúrbio na haste L)

$$\theta(s) = \frac{LG(s)}{1 + G(s)H(s)} X(s) \quad (211)$$

No qual,

$$G(s) = \frac{1}{Ls^2 - g} \quad (212)$$

Portanto, substituindo os valores dos parâmetros a Função de Transferência de Malha Fechada (FTMF) para esse sistema de controle é representada pela seguinte equação:

$$FTMF = \left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + (H(s) - 9.8)} \quad (213)$$

Conforme os objetivos e da metodologia adotada para esse trabalho, serão implementadas as ações de controle PID na malha de realimentação do sistema regulador. Isto é, serão desenvolvidos os casos de controle em que as ações PID atuam individualmente (P, I, D) e em outros em conjunto (PD, PI, PID). Reforça-se de que a análise de estabilidade dos sistemas desenvolvidos será realizada pelo Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz. Serão realizadas simulações para os casos estáveis em relação à entrada impulso através da ferramenta computacional Matlab®. Caso o sistema for estável não procuraremos as melhores respostas transitórias e sim definiremos as faixas de ganho em que o sistema se estabiliza.

4.2.1 Caso 1: Ação Proporcional (P)

A primeira ação de controle que será aplicada para teste de estabilidade, na planta do pêndulo invertido sobre carro será a ação de controle Proporcional (P) na malha de realimentação do sistema regulador. A ideia básica desse método de controle é dimensionar a aceleração do carro proporcionalmente ao ângulo medido, ou seja, a aceleração de controle do carro será proporcional ao valor de ângulo medido multiplicado pelo ganho Proporcional. Para tanto, segue a dedução matemática no seguinte conjunto de equações 214 a 217:

$$u(t) = K_1 \theta(t) \quad (214)$$

$$H(s) = K_p \quad (215)$$

$$FTMF = \left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + (H(s) - 9.8)} \quad (216)$$

Substituindo a equação 215 na equação 216, obtemos:

$$\left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + (K_p - 9.8)} \quad (217)$$

Portanto, a equação característica desse sistema é:

$$a(s) = s^2 + (K_p - 9.8) \quad (218)$$

Analisando a equação 218 para determinar a estabilidade do sistema pelo Critério de Routh-Hurwitz, o sistema se apresenta na condição de instabilidade. Pois, o sistema não atende a condição necessária (mas não suficiente) de que não podem haver coeficientes nulos ou negativos na equação característica. E nesse caso, o sistema apresenta o termo s^1 nulo e s^0 negativo para valores de $K_p < 9.8$ ou nulo para $K_p = 9.8$. Portanto, esse sistema regulador projetado apenas com ganho Proporcional na malha de realimentação para a planta do pêndulo invertido sobre carro não apresenta nenhum valor de K_p que estabilize o sistema. Assim como Oppenheim (1987) descreveu o seu comportamento analisando pelo Método do Lugar das Raízes.

4.2.2 Caso 2: Ação Integral (I)

A segunda ação de controle a ser implementada e testada na malha de realimentação do sistema de controle regulador será a ação Integral. A ideia básica desse método de controle é melhorar a precisão da resposta estacionária, pois, sua saída é proporcional à integração do erro ao longo do tempo de integração. O intuito dessa ação de controle é de escolher a aceleração do móvel baseada em valores da integração do ângulo para corrigir o erro de estado estacionário. Dessa forma, a modelagem matemática para esse sistema segue no conjunto de equações 219 a 222:

$$u(t) = K_2 \int \theta(t) \quad (219)$$

$$H(s) = \frac{K_i}{s} \quad (220)$$

$$FTMF = \left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + (H(s) - 9.8)} \quad (221)$$

Substituindo a equação 220 na equação 221, encontra-se:

$$\left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{K_i}{s} - 9.8 \right)} = \frac{s}{s^3 - 9.8s + K_i} \quad (222)$$

Portanto, a equação característica desse sistema é:

$$a(s) = s^3 - 9.8s + K_i \quad (223)$$

Analisando a equação 223 pelo Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz o sistema é definido como instável. Pois, esse sistema também não atende a condição necessária (mas não suficiente) de que na equação característica do sistema não podem haver coeficientes nulos ou negativos. Nesse caso, o sistema apresenta o termo s^2 nulo e o termo s^1 negativo devido aos valores de parâmetros definidos. Dessa forma, como a condição não é satisfeita o sistema é instável e não é necessário continuar com o desenvolvimento da técnica de Routh-Hurwitz, pois, não há nenhum valor para K_i que estabilize o sistema. Portanto, conclui-se que o sistema regulador apenas com a ação de controle integral, na malha de realimentação, não é suficiente para estabilizar a planta do pêndulo invertido sobre carro.

4.2.3 Caso 3: Ação Derivativa (D)

O próximo passo foi implementar a ação de controle Derivativa (D) na malha de realimentação do sistema regulador para a planta do pêndulo invertido. Essa técnica é baseada no princípio de escolher a aceleração do móvel em função do deslocamento angular. Ou seja, como esse método funciona como um modo antecipativo deseja-se acelerar o carro mais rápido caso o deslocamento angular aumente demais. Os resultados dessa implementação são dados pela seguinte dedução matemática (equações 224 a 226):

$$u(t) = K_3 \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (224)$$

$$H(s) = K_d s \quad (225)$$

$$FTMF = \left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + (H(s) - 9.8)} \quad (226)$$

Substituindo a equação 225 na equação 226, obtemos:

$$\left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + K_d s - 9.8} \quad (227)$$

A equação característica desse sistema é apresentada na equação:

$$a(s) = s^2 + K_d s - 9.8 \quad (228)$$

Realizando a análise da equação 228 pelo Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz o sistema se apresenta na condição de instabilidade. Pois, esse sistema também não atende à condição necessária (mas não suficiente) de que na equação característica do sistema não podem haver coeficientes nulos ou negativos. Nesse caso, o sistema apresenta o termo s^0 negativo. Portanto, como a condição não é satisfeita não é necessário continuar com o método de Routh-Hurwitz, pois, não existem valores de K_d que levem o sistema à estabilidade. Logo, conclui-se que o a planta do pêndulo invertido sobre carro é instável ao tentar controlá-la com o sistema regulador, apenas com a ação de controle Derivativa na malha de realimentação. Analogamente, Oppenheim (1987) deduziu pelo Método do Lugar das Raízes que esse sistema tenderia à estabilidade, porém nunca chegaria de fato a se estabilizar.

4.2.4 Caso 4: Ações Proporcional e Integral (PI)

Como visto, as ações de controle Proporcional, Integral e Derivativa aplicadas individualmente na malha de realimentação do sistema regulador, para a planta do pêndulo invertido sobre carro não, conseguem estabilizar esse sistema. Dessa forma, pretende-se agora implementar a ação Proporcional em conjunto com a ação Integral. Pois, normalmente, num controlador de ganho puramente Proporcional existe um erro de estado estacionário. Pretende-se corrigir esse problema adicionando a ação de controle Integral de maneira que o sistema corrija esse erro e

venha a se estabilizar. O comportamento do sistema a ser modelado é regido pelo seguinte conjunto de equações 229 a 231:

$$u(t) = K_1\theta(t) + K_2 \int \theta(t) \quad (229)$$

$$H(s) = K_p + \frac{k_i}{s} \quad (230)$$

$$FTMF = \left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + (H(s) - 9.8)} \quad (231)$$

Substituindo a equação 230 na equação 231, obtemos:

$$\left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + \left(K_p + \frac{k_i}{s} - 9.8 \right)} = \frac{s}{s^3 + (K_p - 9.8)s + K_i} \quad (232)$$

Dessa forma, a equação característica nesse caso é:

$$a(s) = s^3 + (K_p - 9.8)s + K_i \quad (233)$$

Analisando a equação 233 pelo Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz o sistema é definido como instável. Pois, esse sistema também não atende à condição necessária (mas não suficiente) de que na equação característica do sistema não podem haver coeficientes nulos ou negativos. Nesse caso, o sistema apresenta o termo s^2 nulo, e portanto, não há necessidade de continuar com o método de análise de Routh-Hurwitz. Pois, como o sistema foi considerado como instável diretamente, não existirão valores para os ganhos Proporcional e Integral para estabilizar o sistema. Portanto, esse sistema é de fato instável com a inserção das ações de controle Proporcional e Integral em conjunto na malha de realimentação do sistema regulador.

4.2.5 Caso 5: Ações Proporcional e Derivativa (PD)

Como próximo passo, no caso desse sistema a ser projetado serão combinadas as ações de controle Proporcional e Derivativa na malha de realimentação do sistema regulador. Pois, quando o objetivo de controle para um sistema é melhorar a resposta transitória através de um controlador de alta

sensibilidade, o caso mais simples, é combinar essas duas ações de controle. A dedução matemática para esse sistema segue no conjunto de equações 234 a 236:

$$u(t) = K_1\theta(t) + K_2 \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (234)$$

$$H(s) = K_p + K_d s \quad (235)$$

$$FTMF = \left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + (H(s) - 9.8)} \quad (236)$$

Substituindo a equação 235 na equação 236, obtemos:

$$\left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + (K_p + K_d s - 9.8)} = \frac{1}{s^2 + K_d s + (K_p - 9.8)} \quad (237)$$

Portanto, a equação característica para esse sistema é:

$$a(s) = s^2 + K_d s + (K_p - 9.8) \quad (238)$$

Inicialmente analisando a equação 238 pelo Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz nada se pode concluir. Pois, os termos s^2 e s^1 são positivos e o termo s^0 também pode ser positivo. Portanto, a condição necessária (mas não suficiente) é atendida se s^0 for positivo e pode continuar o desenvolvimento do método de Routh-Hurwitz. Dessa forma, o arranjo em matriz para desenvolvimento do método é descrito conforme:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & K_p - 9.8 \\ s^1 & K_d & 0 \\ s^0 & a & \end{array} \quad (239)$$

Como para esse método é requerido que a coluna "1" contenha somente coeficientes positivos, K_d e a devem respeitar essa restrição, conforme as equações a seguir:

$$a = \frac{K_d(K_p - 9.8) - 1 \cdot 0}{K_d} > 0 \quad (240)$$

$$K_d > 0 \quad (241)$$

Resultando em:

$$a = K_p - 9.8 > 0 \quad (242)$$

$$K_d > 0$$

Ou seja,

$$K_p > 9.8 \quad (243)$$

$$K_d > 0$$

Como para esse método é requerido que a coluna “1” contenha somente coeficientes positivos, o sistema será assintoticamente estável para valores em que K_p for maior que g (aceleração da gravidade com valor positivo de $9,8\text{m/s}^2$) e K_d for maior que zero. Ou seja, o sistema de controle estabilizaria assintoticamente a planta do pêndulo invertido sobre carro desde que, K_p e K_d , satisfizessem as inequações anteriormente estabelecidas (Equação 243).

Serão simulados (para comprovar o que foi dito acima) os valores de ganhos conforme a equação abaixo para a entrada impulso.

$$K_d = 2 \quad K_p = 20 \quad (244)$$

$$K_d = 15 \quad K_p = 200$$

Substituindo os valores do conjunto de ganhos (Equação 244), as FTMF do sistema agora são descritas conforme as equações 245 e 246 respectivamente:

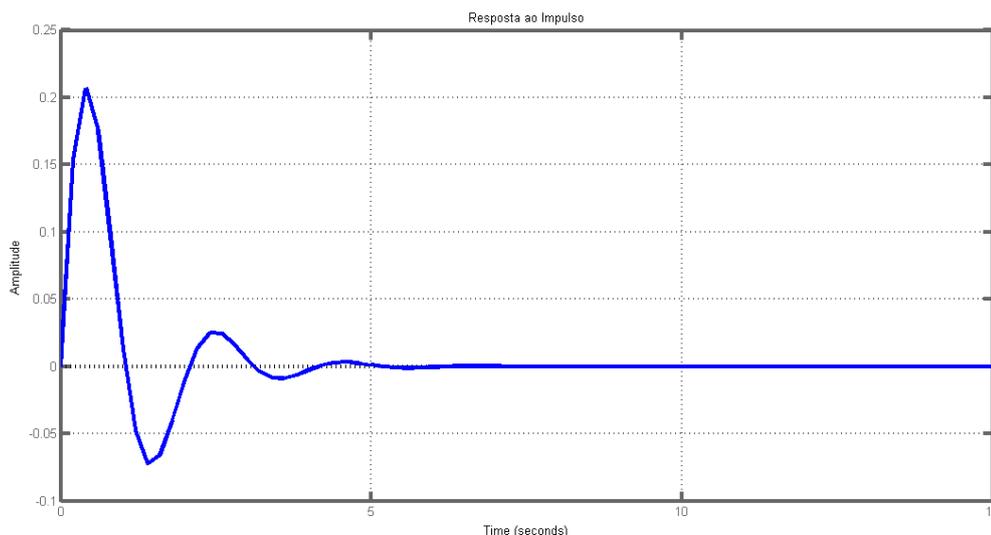
$$\left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + 2s + (20 - 9.8)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 10.2} \quad (245)$$

$$\left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + 15s + (200 - 9.8)} = \frac{1}{s^2 + 15s + 190.2} \quad (246)$$

Os resultados de simulação para essas FTMF são apresentados nas Figuras 31 e 32 respectivamente. Ressalta-se que o conjunto de ganhos (Equação 244) foi escolhido de maneira simples apenas para provar que o sistema é estabilizado quando os valores dos ganhos Proporcional e Derivativo respeitam as inequações apontadas na Equação 242. Portanto, não foram levados em conta os critérios de melhores valores para tempo de resposta, sobressinal ou outros critérios, pois o objetivo desse trabalho é ressaltar o desenvolvimento e a técnica empregada para comprovar se o sistema se estabiliza ou não, e definir a faixa de valores de ganhos

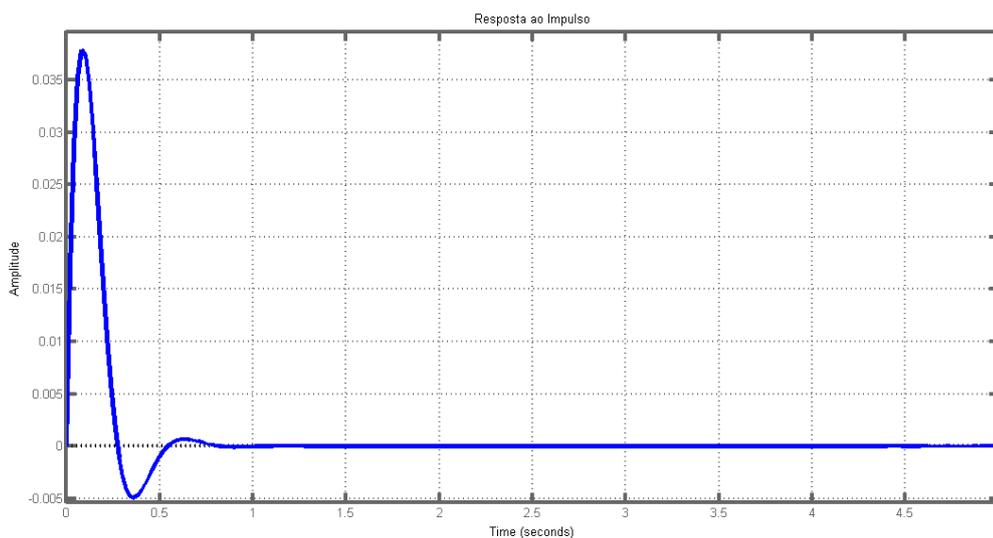
caso sim. Dessa forma, a partir das Figuras 31 e 32 observa-se que o pêndulo é levado para a posição de equilíbrio (posição $\theta = 0$). Logo, conclui-se que quando implementa-se as ações de controle Proporcional e Derivativo na malha de realimentação do sistema regulador, a planta do pêndulo invertido sobre carro é estabilizada com sucesso.

Figura 31 -Resposta ao Impulso do Sistema Regulador PD



Fonte: Autoria Própria (2017)

Figura 32 - Resposta ao Impulso do Sistema Regulador PD



Fonte: Autoria Própria (2017)

4.2.6 Caso 6: Ações Proporcional, Integral e Derivativo (PID)

Para esse último caso, serão aplicadas as três parcelas do controle PID na malha de realimentação do sistema regulador. Pois, em diversas situações de controle de sistemas é necessário satisfazer especificações de desempenhos satisfatórios tanto na resposta transitória como na resposta estacionária. Para o caso desse trabalho, pretende-se analisar se é possível estabilizar ou não a planta do pêndulo invertido com o controle PID na malha de realimentação, e se sim, definir a faixa de valores de ganhos para o sistema ser controlado. O desenvolvimento dessa técnica segue abaixo com o conjunto de equações 247 a 248:

$$u(t) = K_1\theta(t) + K_2 \int \theta(t)dt + K_3 \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (247)$$

$$H(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (248)$$

$$FTMF = \left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + (H(s) - 9.8)} \quad (249)$$

Substituindo a equação 249 na equação 249, temos:

$$\left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{1}{s^2 + \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s - 9.8 \right)} = \frac{s}{s^3 + K_d s^2 + (K_p - 9.8)s + K_i} \quad (250)$$

A equação característica na ocasião desse sistema é:

$$a(s) = s^3 + K_d s^2 + (K_p - 9.8)s + K_i \quad (251)$$

Inicialmente analisando a equação 251 pelo Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, nada se pode concluir. Pois, os termos s^3 e s^2 são positivos e os termo s^2 e s^0 também podem ser positivos. Logo, a condição necessária (mas não suficiente) é satisfeita, caso s^2 e s^0 sejam positivos, e pode-se continuar a desenvolver o método de Routh-Hurwitz. O arranjo para análise e desenvolvimento do método é então descrito na seguinte equação:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K_p - 9.8 \\ s^2 & K_d & K_i \\ s^1 & a & b \\ s^0 & c & \end{array} \quad (252)$$

Como para esse método é requerido que a coluna “1” contenha somente coeficientes positivos, K_d , a e c devem respeitar essa restrição, conforme o conjunto de equações abaixo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{K_d(K_p - 9.8) - K_i}{K_d} > 0 \\ b &= 0 \\ c &= \frac{aK_i}{a} > 0 \\ K_d &> 0 \end{aligned} \quad (253)$$

Logo,

$$\begin{aligned} K_p &> \frac{K_i}{K_d} + 9.8 \\ 0 &< K_i < K_d(K_p - 9.8) \\ K_d &> \frac{K_i}{K_p - 9.8} > 0 \end{aligned} \quad (254)$$

Portanto, é possível concluir que esse sistema de controle regulador com as ações de controle PID na malha de realimentação estabilizaria assintoticamente o sistema do pêndulo invertido sobre carro se a coluna “1”, da equação 252, fosse composta apenas por coeficientes positivos. Para isso, a restrição para alcançar essa estabilidade é que os ganhos K_p , K_i e K_d devem satisfazer as inequações acima estabelecidas (Equações 254).

Serão simulados, para comprovar o que foi dito acima, os valores de ganho conforme a equação a seguir para a entrada impulso.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_p = 100 \\ K_p = 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_i = 1 \\ K_i = 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_d = 20 \\ K_d = 35 \end{pmatrix} \quad (255)$$

Lembrando que, esses valores foram escolhidos respeitando as inequações estabelecidas (Equação 254), de forma simples. Portanto, também não foram levados em conta os critérios de melhores valores para tempo de resposta, sobressinal ou outros critérios. Pois o intuito do trabalho é demonstrar que o sistema estabiliza com as ações de controle PID inseridas na malha de realimentação do regulador, e não, procurar as melhores respostas transitórias para o sistema.

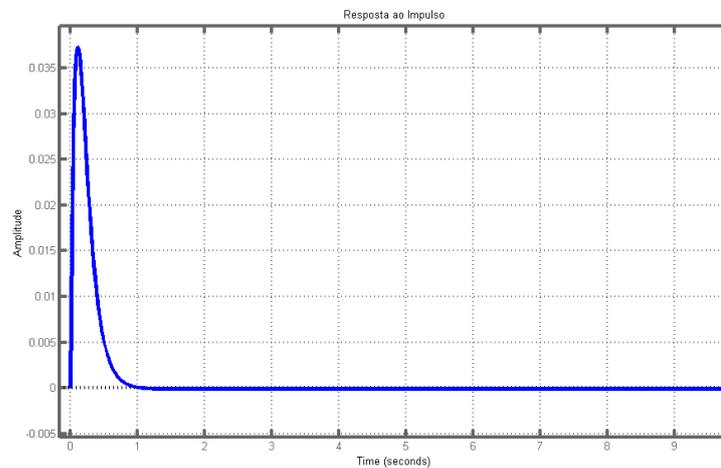
Substituindo os valores do conjunto de ganhos (Equação 255), as FTMF do sistema agora são descritas conforme as seguintes equações respectivamente:

$$\left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{s}{s^3 + 20s^2 - (9.8 - 100)s + 1} = \frac{s}{s^3 + 20s^2 + 90.2s + 1} \quad (256)$$

$$\left[\frac{\theta(s)}{X(s)} \right] = \frac{s}{s^3 + 35s^2 - (9.8 - 200)s + 1} = \frac{s}{s^3 + 35s^2 + 190.2s + 1} \quad (257)$$

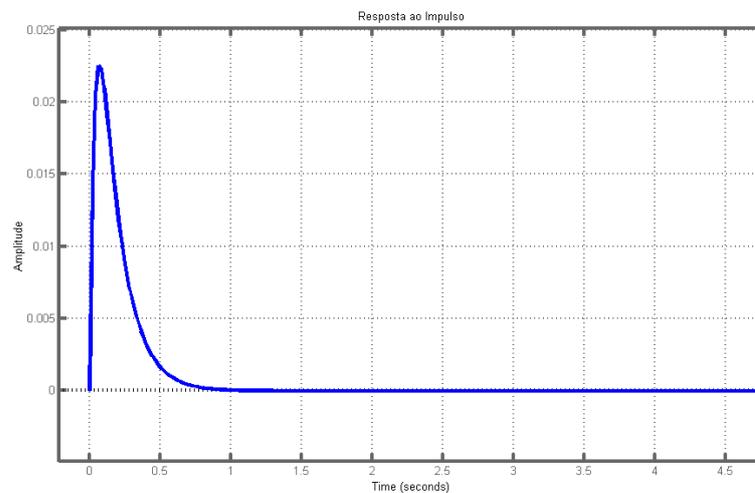
Os resultados de simulação para essas FTMF são apresentados nas Figuras 33 e 34 respectivamente.

Figura 33 - Resposta ao Impulso do Sistema Regulador PID



Fonte: Autoria Própria (2017)

Figura 34 - Resposta ao Impulso do Sistema Regulador PID



Fonte: Autoria Própria (2017)

Dessa forma, a partir das respostas apresentadas observa-se que o pêndulo também é levado para a posição de equilíbrio (posição $\theta = 0$) para esse caso de controle. Um breve comentário (que pode ser levado em conta por efeito de comparação) analisando as Figuras 33 e 34 com ganhos PID e Figuras 31 e 32 com ganhos PD, é de que a inserção do ganho Integral no sistema corrigiu (para os parâmetros escolhidos) a curva de resposta rapidamente. Portanto, conclui-se que quando implementa-se as ações de controle Proporcional, Integral e Derivativo na malha de realimentação do sistema regulador, a planta do pêndulo invertido sobre carro pode ser assintoticamente estabilizada com desempenho satisfatório.

5 CONCLUSÃO

A bibliografia que aborda sobre técnicas de controle PID no sistema do pêndulo invertido é ampla no quesito de quantidade. Porém, os resultados e discussões apresentados nesse trabalho indicam que para os sistemas de controle desenvolvidos (servo e regulador), a implementação das ações de controle PID nos mesmos foram apresentadas de maneira relevante para complementar o material de controle existente. Pois, ao deparar com esses sistemas propostos e apresentados nas bibliografias viu-se a necessidade e importância teórica de continuar os estudos realizados por dois autores bastante conhecidos.

Dessa forma, foram apresentadas a complementação para os casos em que os autores não abordaram a inserção das ações de controle PID na planta do pêndulo invertido, talvez por motivos “óbvios” ou mesmo para deixar como estímulo aos estudantes o desenvolvimento e análise por si só, satisfazendo os objetivos e justificativa desse trabalho.

Para todos os casos abordados nesse trabalho foram deduzidos os controladores com detalhes mínimos para o entendimento e compreensão de estabilidade. Pois, como muita das vezes não são apresentados resultados de controle negativos em diversas bibliografias, isso foi levado em conta nesse trabalho de forma que foram comprovados por meio de técnicas matemáticas e de controle, os casos em que o sistema apresentou-se na condição de instabilidade.

Portanto, realizar um estudo aprofundado de parte das técnicas de controle clássico e controle moderno para a resolução do problema de controle do pêndulo invertido, permite ao acadêmico adquirir um alicerce teórico de grande valia. Assim como, a simulação em ambientes computacionais inspira interesse e curiosidade sobre o comportamento da dinâmica do sistema em questão na prática, bem como, sobre quaisquer fenômenos em geral.

Dessa maneira, conclui-se que esse trabalho abordou um sistema clássico e com inúmeros trabalhos e pesquisas realizados sobre o mesmo tema, para complementar o material existente. Pois foram desenvolvidos os dois diferentes sistemas de controle para cada tipo e combinação das ações de controle PID na malha direta do servo por espaço de estados e na malha de realimentação do regulador por função de transferência.

6 REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

ANDERSON, C. W. **Learning to control an inverted pendulum using neural networks**. IEEE Control Systems Magazine, v.9, n.3, p. 31-37, 1989.

ANDERSON, P. **Control systems: Classical Controls**. 1. ed. Delhi: Global Media, 2009.

ARCOLEZI, H. H.; BASSI, B.; ROANES, H. T. F.; ANDRADE, T. G.; QUIRINO, R. B. **Análise da inserção do ganho proporcional no método de controle por servossistema do tipo 1 no sistema do pêndulo invertido**. In: CONGRESSO DAS ENGENHARIAS DO ESTADO DE MATO GROSSO, 1., 2017, Sinop, MT. Anais COENG. Sinop: Universidade do Estado de Mato Grosso, 2017. p. 1-10.

ARCOLEZI, H. H.; QUIRINO, R. B. **Um estudo complementar ao projeto de controle PID do pêndulo invertido**. In: CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS, 2., 2017, Campina Grande, PB. Anais CONAPESC. Campina Grande: Realize Eventos e Editora, 2017. p. 1-3.

ÅSTRÖM, K. J.; FURUTA, K. **Swinging up a pendulum by energy control**. In: IFAC World Congress, 13. São Francisco, California. Anais IFAC. São Francisco: Automatic, 1996. p. 1-15.

ÅSTRÖM, K. J.; MURRAY, R. M. **Feedback Systems: An introduction for scientists and engineers**. New Jersey: Princeton University Press, 2008.

BERCI, C. D.; BOTTURA, C. P. **Controle não linear genético do pendulo invertido**. In: Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, 9., Serra Negra, SP. Anais eletrônicos DINCON'10. Serra Negra: Journal and Event Management System (JEMS), 2010. Disponível em: <<http://www.sbmac.org.br/dincon/trabalhos/PDF/optimization/68000.pdf>>. Acesso em: 1 mar. 2017.

BOUBAKER, O. **The inverted pendulum: A fundamental benchmark in control theory and robotics**. In: IEEE International Conference on Education and e-Learning Innovations (ICEELI), 2012. Sousse, Tunisia. Anais ICEELI'2012. Disponível em: < <http://ieeexplore.ieee.org/document/6360606/>>. Acesso em: 13 maio. 2017.

BOTTURA, C. P. **Princípios de Controle e Servomecanismos**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1982.

BUBNICKI, Z. **Modern Control Theory**. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer, 2005.

BUZETTI, A. S.; RIBEIRO, J. M. S.; TEIXEIRA, M. C. M.; GARCIA, J. P. F.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, E. A. **Projeto e implementação do sistema de controle de um pêndulo invertido: Utilizando o método do lugar das raízes**. In: Congresso Brasileiro de Automática, 19., 2012, Campina Grande. Anais CBA 2012. Campina Grande: Sociedade Brasileira de Automática, 2012. p. 1-7.

CASTRUCCI P. L.; BITTAR, A.; SALES, R. M. **Controle automático**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

CHACKRABORTY, K.; SEN, A. K.; BASAK, R. D.; RAUSHAN, R. **Case study of various parameters by applying swing up control for inverted pendulum**. Indonesian Journal of Electrical Engineering and Informatics (IJEEI), Indonésia, p. 167-171, set 2015.

COELHO, D. B. **Modelo de ativação neural do controle postural humano durante a postura ereta**. ENGEVISTA, Rio de Janeiro, v.7, n.1, p. 83-90. 2005.

COSTA, A. P.; SILVA, S. A.; LIRA, V. V. **Simulações de sistemas de controle de pêndulo simples e invertido em malhas aberta e fechada**. Revista principia, Paraíba, n.25, p. 22-27. 2014.

COSTA, A. P.; LIRA, V. V.; SILVA, S. A. **Simulações de Pêndulo Simples e Invertido**. In: Congresso Norte Nordeste de Pesquisa e Inovação, 7., Palmas, TO. Anais CONNEPI. Palmas: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, 2012. p.1-12.

D'AZZO, J. J.; HOUPIS, C. H. **Linear control system analysis and design with matlab**. 15. ed. New York: Marcel Dekker, 2003.

DINIZ, I. S.; SCHVARCZ, A. F.; CARRION, R.; SILVA, J. F. **Controle de um pêndulo invertido auxiliado por computador integrando PID e servossistema multivariável**. In: Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, 8., 2009, Bauru, SP. Anais DINCON'09. Bauru: Universidade Estadual Paulista, 2009. p. 1-11.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern control systems**. New Jersey: Pearson Education, 2011.

DRUMMOND, A. C.; OLIVEIRA, K. C.; BAUCHSPIESS, A. **Estudo do controle de pêndulo inverso sobre carro utilizando rede neural de base radial**. In: Brazilian Conference on Neural Networks, 4., 1999, São José dos Campos, SP. Anais do IV Congresso Brasileiro de Redes Neurais. São José dos Campos: Associação Brasileira de Inteligência Computacional, 1999. p. 320-325.

ERNESTO, J. G.; RESENDE, A.; AMARAL, A. M. M. M.; SALEM, F. A. **Análise quantitativa do controle de um pêndulo invertido por ação PID e lógica fuzzy**. In: Encontro Internacional de Produção Científica UniCesumar, 9., 2015, Maringá, PR. Anais Eletrônicos do IX EPCC. Maringá: UniCesumar, 2015. p. 4-8.

FAJAR, M. **Conceptual design and simulation of an inverted pendulum wheelchair**. Liverpool: Liverpool John Moores University, 2013.

FELÍCIO, L. C. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: RiMa Editora, 2010.

FERNANDÉZ-CARA, E.; ZUAZUA, E. **Control Theory: History, Mathematical Achievements and Perspectives**. In: Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, 26, p. 79-140, 2006. Disponível em: <<https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/41421>>. Acesso em: 01 Fevereiro 2017.

FERREIRA, A. L. S.; ALVES, A. S. C.; MARTINS, C. H. N.; MUNIZ, C. A.; FARIA, P. V. A.; CÉSAR T. C.; GOMES, F. J. **O problema da defasagem entre a teoria e a prática**: Proposta de uma solução de compromisso para um problema clássico de controle. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 34., 2006, Passo Fundo, RS. Anais eletrônicos COBENGE 2006. Passo Fundo: Associação Brasileira de Educação e Engenharia, 2006. Disponível em: <http://198.136.59.239/~abengeorg/CobengeAnteriores/2006/artigos/12_217_859.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2017.

FILHO, M. D.; JESUS, H. G. C. F. M.; CORTES, J. M. R.; CARVALHO, A. S.; JUNIOR, G. G. P. **Controle fuzzy para posicionamento de um pêndulo invertido**. In: SIMPÓSIO DE EXCELÊNCIA EM GESTÃO E TECNOLOGIA, 10., 2013, Resende, RJ. Anais eletrônicos SEGeT 2013. Resende: ASSOCIAÇÃO EDUCACIONAL DOM BOSCO – AEDB, 2013. Disponível em: <<http://www.aedb.br/seget/arquivos/artigos13/37318399.pdf>>. Acesso em: 02 maio 2017.

FIROOZIAN, R.; **Mechanical engineering series: Servo motors and industrial control theory**. New York: Springer Science + Business Media, 2009.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; NAEINI, A. E. **Sistemas de Controle para Engenharia**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

FRUTUOSO, A.; SANTOS, A. L.; SALES, D. C. **Estabilização de um pêndulo invertido usando controlador H2 contínuo**. In: Congresso Brasileiro de Automática, 20., 2014, Belo Horizonte, MG. Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática. Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Automática, 2014. Disponível em: <<http://www.swge.inf.br/CBA2014/anais/PDF/1569934871.pdf>>. Acesso em: 15 abr. 2017.

GOMES, M. C. M.; SILVA, C. D.; BAYMA, R. S., NEVES, M. R., SILVA, O. F. **Construção de protótipo didático ‘pêndulo rotacional’ para pesquisa e ensino de controle e automação de sistemas**. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 33., 2005, Campina Grande, PB. Anais do COBENGE 2005. Campina Grande: Associação Brasileira de Educação e Engenharia, 2005. Disponível em: <<http://198.136.59.239/~abengeorg/CobengeAnteriores/2005/artigos/PA-15-78995710225-1118699047825.pdf>>. Acesso em: 11 maio 2017.

GOPAL, M. **Digital Control and State Variable Methods: Conventional and neuro-fuzzy control systems**. 2. ed. Delhi: Tata McGraw-Hill, 2003.

JAGAN, N. C. **Control systems**. 2. ed. Hyderabad: BS Publications, 2008.

JAMES, H. M. **Theory of servomechanisms**. 1. ed. New York: McGraw-Hill BOOK COMPANY, 1947.

JOSE, A.; AUGUSTINE, C.; MALOLA, S. M.; CHACKO, K. **Performance Study of PID Controller and LQR Technique for Inverted Pendulum.** World Journal of Engineering and Technology, 3, p. 76-81, maio 2015. Disponível em: <http://file.scirp.org/pdf/WJET_2015052217370851.pdf>. Acesso em: 8 mar. 2017.

KAFETZIS, I., MOYSIS, L. **Inverted Pendulum: A system with innumerable applications.** In: International Week Dedicated to Maths, 9., 2017, Thessaloniki: Aristotle University of Thessaloniki, 2017. p. 1-13.

KAGUEYAMA, C. A.; **Sintonia do controlador PID: Método de Ziegler Nichols modificado.** Londrina, PR: Universidade Estadual de Londrina, 2011.

KOEHLERT, F. C.; INABA, F. K.; MARTINS, F. N. **Projeto e implementação de controlador fuzzy para um pêndulo invertido.** In: Congresso Nacional de Engenharia Mecânica e Industrial, 10., 2010, Vitória, ES. Anais do CONEMI 2010. Vitória: FENEMI, 2010. p. 1-12.

KRISHNAN, T. R. **On Stabilization of Cart-Inverted Pendulum System: An Experimental Study.** Rourkela, Odisha, India: National Institute of Technology, 2012.

KUMAR, P.; CHACKRABORTY, K.; MUKHERJEE, R. R.; MUKHERJEE, S. **Modelling and Controller Design of Inverted Pendulum.** International Journal of Advanced Research in Computer Engineering & Technology (IJARCET), v.2, n.1, p. 200-206, jan. 2013. Disponível em: <<http://ijarcet.org/wp-content/uploads/IJARCET-VOL-2-ISSUE-1-200-206.pdf>>. Acesso em: 10 mar. 2017.

KURDEKAR, V.; BORKAR, S. **Inverted Pendulum Control: A Brief Overview.** International Journal of Modern Engineering Research (IJMER), v.3, n.5, p. 2924-2927, set. 2013. Disponível em: <www.ijmer.com/papers/Vol3_Issue5/BZ3529242927.pdf>. Acesso em: 25 abr. 2017.

LEIGH, J. R. **Control theory.** 2. ed. London: The Institution of Electrical Engineers, 2004.

LENKA, N. **Modeling and Controller Design for an Inverted Pendulum System.** Rourkela: National Institute of Technology Rourkela, 2011.

LEVINE, W. S. **Control system fundamentals.** 2. ed. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2011.

LUNDBERG, K. H., BARTON T. W. **History of Inverted Pendulum Systems.** In: 8th IFAC Symposium on Advances in Control Education vol. 42, pp 131-135, 2010.

LURIE, B. J.; ENRIGHT, P. J.; **Classical feedback control with matlab.** New York: Marcel Dekker, 2000.

MAHLER, W. F. C.; SANTOS, D. P. S. **Dinâmica não linear do pêndulo invertido.** In: Conferência Brasileira de Dinâmica, 10., 2011, Águas de Lindoia, SP. Anais do

DINCON 2011. Águas de Lindoia: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2011. p. 430-433.

MALETINSKY, W., SENNING M. F., WIEDERKEHR F. **Observer based control of a double pendulum.** In: IFAC World Congress, pp. 3383–3387, 1981.

MANDAL, A. K.; **Introduction to control engineering:** Modeling, analysis and design. New Delhi: New Age International, 2006.

MARTINS, L. T.; VIEIRA, R. P. **Controle por modos deslizantes aplicado a um pêndulo invertido.** In: Seminário de Eletrônica de Potência e Controle (SEPOC), 9., 2015, Santa Maria, RS: Universidade Federal de Santa Maria, 2015. p. 1-6.

MEIER, H., FARWING Z., UNBEHAUEN H. **Discrete computer control of a Triple inverted pendulum.** In: Opt. Cont. App. & Methods, 11, p. 157–171, 1990.

MIRANDA, A. R. L.; MONTEIRO, P. M. B.; JUNIOR, J. A. N.; FREITAS, G. M. **Comparação entre controladores clássico se fuzzy comandando um pêndulo invertido tipo carro implementado com lego mindstorms ev3.** In: Workshop de Robótica Educacional, 6., 2015, Uberlândia, MG. Anais do WRE 2015. Uberlândia: Sociedade Brasileira de Computação, 2015. p. 22-27.

MÓDOLO, M.; GUIMARÃES, L. N. F. **Sistemas inteligentes para controle de veículos espaciais autônomos baseados em paradigmas de inteligência computacional a exemplo de lógica nebulosa.** In: Workshop de Computação Aplicada, 12., 2012, São José dos Campos, SP. Anais do WORCAP 2012. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2012. p. 1-8.

MORAIS, M. H. E., MURALIKRISHNA, A., BRAVO, R.; GUIMARÃES, L. N. F. **Um controlador nebuloso aplicado ao problema do pêndulo invertido.** In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 28., 2005, São Paulo, SP. p. 1–5.

MORAIS, M. H. E.; MURALIKRISHNA, A.; GUIMARÃES, L. N. F. **Sistema de controle PID e nebuloso aplicado ao problema do pêndulo invertido.** In: V WORCAP, 2005, São José dos Campos. Anais V Worcap, 2005.

MORI, S., NISHIHARA H., FURUTA, K. **Control of unstable mechanical systems: Control of pendulum.** In: International Journal of Control, 23:5, p. 673–692, 1976.

MURALIKRISHNA, A.; BRAVO, R.; GUIMARÃES, L. N. F. 2005, **Implementação de um controlador PID para aplicação no modelo do pêndulo invertido em uma base móvel.** In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 27., 2005, São Paulo, SP. p. 1-4.

NEETHA, R. **Design of controllers for a non-linear system using pole-placement and linear quadratic regulator technique to solve servo and regulatory problem.** International Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS), v.3, n.11, p. 57-61, nov. 2016. Disponível em:

<https://www.ijeas.org/download_data/IJEAS0311025.pdf>. Acesso em: 17 jun. 2017.

NEWTON, R. G.; **Galileo's pendulum: from the rhythm of time to the making of matter.** Massachusetts: President and Fellows of Harvard College, 2004.

NISE, N. S. **Control systems engineering.** 6. ed. USA: JohnWiley & Sons, 2011.

NORONHA, R. F.; LIMA, L. T. G. ; SOARES, L. A. G. ; SILVA, M. T. Z. . **Projeto e Desenvolvimento de um Pêndulo Invertido como Exemplo de Aplicação da Didática de Aprender Fazendo.** In: Congresso Nacional de Engenharia Mecânica – CONEM, 2000, Natal, RN. Anais do CONEM 2000, em CDROM, 2000.

OGATA, K. **Modern control engineering.** 15. ed. Boston: Prentice Hall, 2010.

OLIVEIRA, R. C.; NORONHA, R. F.; LARREA, J. A. S.; LIMA, L. T. G. **Modelagem matemática e projeto de controle de sistemas mecânicos: O pêndulo invertido.** In: Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2., 2002, João Pessoa, PB, Anais CONEM 2002, João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2002, p. 1-10.

OPPENHEIM, A. V. **Signals and Systems.** Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, 2011. Disponível em: <<https://ocw.mit.edu>>. Acesso em: 3 abr. 2017.

PARASKEVOPOULOS, P. N. **Modern control engineering.** New York: Marcel Dekker, 2002.

POOK, L. P. **Understanding pendulums: A brief introduction.** New York: Springer Science + Business Media, 2011.

RAZMJOOY, N.; MADADI, A.; ALIKHANI, H. R.; MOHSENI, M. **Comparison of LQR and pole placement design controllers for controlling the inverted pendulum.** Journal of World's Electrical Engineering and Technology (JWEET), v.3, n.2, p. 83-88, ago. 2014. Disponível em: <[http://www.jweet.science-line.com/attachments/article/22/J.%20World.%20Elect.%20Eng.%20Tech.%203\(2\)%2083-88,%202014.pdf](http://www.jweet.science-line.com/attachments/article/22/J.%20World.%20Elect.%20Eng.%20Tech.%203(2)%2083-88,%202014.pdf)>. Acesso em: 05 mar. 2017.

RESENDE, A. F.; ERNESTO, J. G.; GENTILIN, F. A. **Análise quantitativa de um pêndulo invertido controlado por pid e lógica fuzzy.** Maringá/PR: UniCesumar, 2016.

RIBEIRO, J. M. S.; PAULA, A. L. A.; GARCIA, J. P. F.; GARCIA, L. M. C. F.; APOLINÁRIO, G. C. **Controle experimental do pêndulo invertido considerando atraso computacional.** In: Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 10., 2011, São João del Rei, MG. Anais do Simpósio SBAI X. São João del-Rei: Sociedade Brasileira de Automática, 2011. p. 959-964.

RIBEIRO, R. **Implementação de um sistema de controle de um pêndulo invertido.** Itajubá, MG: Universidade Federal De Itajubá, 2007.

ROBERGE, J. K. **The Mechanical Seal**. Bachelor's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1960.

ROCHA, P. H. S. C.; PELLINI, E. L. **Pêndulo Invertido Autocontrolado**. São Paulo, SP: Centro Universitário FIEO, 2008.

ROSA, S. S. F. R.; AVILA, S. M.; JÚNIOR, H. O. C.; SILVA, B. S. S. **Plataforma para controle de processos físicos em tempo real utilizando um pêndulo invertido**. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 6., 2010, Campina Grande, PB. Anais CONEM 2010. Campina Grande: Universidade Federal de Campina Grande, 2010. p. 1-10.

SCHAEFER, J. F., CANNON R. H. **On the control of unstable mechanical systems**. In: Automat. Remote Contr. III, Proc. 3rd Int. Fed. Automat. Contr. (IFAC), vol. 1, 6C.16C.13, 1967.

SILVA, C. W. **Modeling and control of engineering systems**. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2009.

SILVA, E. A. **Construção, Modelagem e Controle de um Pêndulo Invertido com CLP e Software SCADA**. Ilha Solteira, SP: Universidade Estadual Paulista, 2013.

SILVA, E. R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. S. **Síntese de controlador via LMIs e implementação em um pêndulo invertido modelo linear da quanser**. Fortaleza, CE: INDUSCON, 2012.

SILVA, H. V. D.; GONGORA, W. S.; SUMAR, R. R.; VALLIM, M. B. R.; GOEDEL, A. **Estudo comparativo entre os controladores fuzzy e PID aplicados ao controle de um pêndulo invertido utilizando plataforma lego mindstorms nxt**. Fortaleza, CE: SBAI/DINCON, 2013.

SILVA, I. M.; SANTOS, C. S.; ANDRADE, K. O. **Construção e programação de pêndulo invertido usando kit lego® mindstorms EV3**. Revista Technologies, Nova Odessa, v.8, n.1, p. 20-35. 2015.

SOBRINHO, C. A. N.; **Controlador neural aplicado a um sistema posicionador acionado por motores de indução trifásicos**. João Pessoa, PB: Universidade Federal da Paraíba, 2011.

SONTAG, E. D. **Mathematical control theory: Deterministic finite / dimensional systems**. 2. ed. Piscataway: Springer Science, 1998.

SULTAN, G. A. **Comparison of LQR and pole placement Controllers for stabilizing inverted Pendulum system**. International Journal of Enhanced Research in Science Technology & Engineering, v.3, n.6, p. 392-400, jun. 2014. Disponível em: <http://www.erpublications.com/uploaded_files/download/download_16_07_2014_10_19_42.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2017.

TAVARES, M. A.; SANTOS, R. B.; NETO, C. M.; JÚNIOR, V. L. **Controle de um pêndulo invertido utilizando o modelo fuzzy takagi-sugeno**. Uberlândia, MG: POSMEC, 2006.

TEIXEIRA, F. S.; SODRÉ, J. L. F.; JUNIOR, M. R. **O sistema dinâmico pêndulo invertido: modelagem e projeto de controladores por simulação computacional**. Campos dos Goytacazes, RJ: Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, 2006.

TEIXEIRA, H. T.; SIQUEIRA, V. S. M.; MUNARO, C. J. **Estimação e compensação de atritos em um pêndulo invertido**. In: Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 10., 2011, São João del Rei, MG. Anais do Simpósio SBAI X. São João del-Rei: Sociedade Brasileira de Automática, 2011. p. 332-337.

TEWARI, A. **Modern control design with matlab and Simulink**. Chichester: John Wiley & Sons, 2002.

TONIDANDEL, D. A. V.; ARAÚJO, A. E. A. **Transformada de Laplace: uma obra de engenharia**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.34, 2012. São Paulo, SP: Sociedade Brasileira de Física, 2012.

TRIVELATO, G. C. **Técnicas de Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos**. São José dos Campos/SP: INPE, 2003.

VASCONCELOS, V. B.; ALMEIDA, G. M.; CUADROS, M. A. S. L.; AMARAL, R. P. P. **Controle de um sistema pêndulo invertido usando controladores inteligentes**. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 40., 2012, Belém, PA. Anais COBENGE 2012. Belém: Associação Brasileira de Educação e Engenharia, 2012. p. 1-12.

VENDRAMINI, G.; SILVA, P. S. **Controle de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel descrevendo trajetória unidimensional especificada**. Bauru, SP: Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications, 2009.

VENDRAMINI, G.; SILVA, P. S. **Controle de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel utilizando pid e mfac (model-free adaptive control)**. In: Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, 9., Serra Negra, SP. Anais eletrônicos DINCON'10. Serra Negra: Journal and Event Management System (JEMS), 2010. Disponível em: <<http://www.sbmac.org.br/dincon/trabalhos/PDF/control/68876.pdf>>. Acesso em: 10 abr. 2017.

WILLIAMS II, R. L.; LAWRENCE, D. A. **Linear state-space control systems**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.